

TUGAS AKHIR - SM141501

ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL SISTEM GERAK SATELIT MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTYAGIN

PUTRI SARASWATI
NRP. 1213 100 063

Dosen Pembimbing
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.
Drs. Kamiran, M.Si.

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017



TUGAS AKHIR - SM141501

**ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL SISTEM
GERAK SATELIT MENGGUNAKAN PRINSIP
MINIMUM PONTRYAGIN**

PUTRI SARASWATI
NRP 1213 100 063

Pembimbing:
Dr. Dra. Mardijah, M.T.
Drs. Kamiran, M.Si.

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017



FINAL PROJECT - SM141501

**ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF
SATELLITE MOTION SYSTEM USING
PONTRYAGIN MINIMUM PRINCIPLE**

PUTRI SARASWATI
NRP 1213 100 063

Supervisors:
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.
Drs. Kamiran, M.Si.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2017

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL SISTEM
GERAK SATELIT MENGGUNAKAN PRINSIP
MINIMUM PONTRYAGIN**

***ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF
SATELLITE MOTION SYSTEM USING
PONTRYAGIN MINIMUM PRINCIPLE***

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

PUTRI SARASWATI

NRP. 1213 100 063

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,

Drs. Kamiran, M.Si.

NIP. 19630623 198903 1 001

Dr. Dra. Mardijah, M.T.

NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika

FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, M.T.

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 17 Juli 2017

ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL SISTEM GERAK SATELIT MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTYAGIN

Nama Mahasiswa : Putri Saraswati
NRP : 1213 100 063
Departemen : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Dr. Dra. Mardijah, M.T.
2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstrak

Satelit adalah benda yang mengorbit benda lain dengan periode revolusi dan rotasi tertentu. Ada dua jenis satelit yakni satelit alami dan satelit buatan. Satelit buatan diluncurkan menuju orbitnya pada posisi tertentu yang tidak terpengaruh oleh gaya-gaya gravitasi dan hanya bergerak mengikuti pergerakan bumi. Posisi ini disebut sebagai posisi geostasioner. Dalam peredarannya, walaupun orbit geostasioner dapat menjaga suatu satelit berada pada tempat yang tetap, tetapi satelit pada orbit ini tidak akan selalu berada pada orbitnya dikarenakan adanya perturbasi orbital. Sehingga dalam Tugas Akhir ini dibahas mengenai analisis dan kontrol optimal sistem gerak satelit untuk menstabilkan posisi satelit menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Hasil simulasi dari Tugas Akhir ini menunjukkan bahwa sistem gerak satelit dapat kembali ke posisi geostasionernya pada waktu 60s dengan kontrol yang diberikan berupa percepatan radial (u_1) dan percepatan tangensial (u_2) sebesar 0.005 serta dengan bobot c_1 dan c_2 berupa impuls dikali waktu per satuan jarak sebesar $c_1 = c_2 = 10$ sehingga menghasilkan energi optimal sebesar 0.0151.

Kata kunci: satelit, sistem gerak satelit, kontrol optimal, Prinsip Minimum Pontryagin.

ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF SATELLITE MOTION SYSTEM USING PONTYAGIN MINIMUM PRINCIPLE

Name : Putri Saraswati
NRP : 1213 100 063
Department : Matematika FMIPA-ITS
Supervisor : 1. Dr. Dra. Mardlijah, M.T.
2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstract

Satellites are orbiting objects of another thing with a certain period of revolution and rotation. There are two types of satellites: natural satellites and artificial satellites. Artificial satellites are launched into orbit at certain positions that are unaffected by gravitational forces and move only to the movement of the earth. This position is referred to as the geostationary position. In circulation, although geostationary orbit can keep a satellite in a fixed place, but the satellites in this orbit will not always be in orbit due to orbital perturbation. So in this final project discussed about analysis and optimal control of satellite motion system to stabilize satellite position using Pontryagin Minimum Principle. The simulation results of this Final Project show that the satellite motion system can return to its geostationary position at 60s with the control given in the form of radial acceleration (u_1) and tangential acceleration (u_2) of 0.005 and with the weight of c_1 and c_2 in the form of impulses multiplied by time per unit distance of $c_1 = 10$, $c_2 = 10$ to produces an optimum energy of 0.0151.

Keywords: *satellites, satellite motion control, optimal control, Pontryagin Minimum Principle.*

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

“ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL SISTEM GERAK SATELIT MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTYAGIN”

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, M.T. selaku Kepala Departemen Matematika FMIPA-ITS.
2. Ibu Dr. Dra. Mardijah, M.T. selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA-ITS dan selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan motivasi dan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
3. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si. selaku Sekretaris Kaprodi S1 Departemen Matematika FMIPA ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesainya Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. Kamiran, M.Si. selaku dosen wali dan selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan motivasi dan pengarahan selama perkuliahan dan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
5. Bapak Drs. Suharmadi, Dipl. Sc, M.Phil, Bu Dian Winda, S.Si, M.Si, Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si. sebagai dosen penguji Tugas Akhir yang telah memberikan kritik dan saran yang bersifat membangun dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

6. Bapak dan Ibu dosen, seluruh staf Tata Usaha, dan asisten laboratorium Departemen Matematika FMIPA-ITS.
7. Seluruh teman-teman Matematika FMIPA-ITS angkatan 2013 terima kasih atas dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.
8. Seluruh fungsionaris BEM FMIPA-ITS 2015/2016 khususnya Departemen Sosial Masyarakat dan *Social Community of* FMIPA-ITS (SCOFI) terima kasih telah menjadi keluarga penulis selama di organisasi.

Apabila dalam Tugas Akhir ini ada kekurangan, penulis mohon kritik dan saran demi penyempurnaan Laporan Tugas Akhir di masa mendatang. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Surabaya, Juli 2017

Penulis

Special Thanks to:

Keberhasilan Tugas Akhir ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih dan apresiasi secara khusus kepada:

1. Bapak Budi Sarsito dan Ibu Rahmawati, kedua orang tua penulis tercinta, serta Dewi Sugiarti, adik penulis, yang selalu memberikan doa terbaik, kasih sayang, dukungan, motivasi, nasihat kepada penulis.
2. Siti Nur Afifah, Retno Palupi, dan Airin Nur Hidayati, sahabat penulis dari awal perkuliahan tempat penulis berbagi suka duka, yang selalu memberikan dukungan, semangat, motivasi, waktu dan keceriaan untuk penulis.
3. Hartanto Setiawan, Nastitie, Ardi Firmansyah, Frikha Anggita, Ivan Octaviano, Mega Fatmawati, Elmir Arif Irhami dan teman-teman seperjuangan yang lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang selalu memberikan doa, dukungan, motivasi, serta bantuan kepada penulis selama ini.
4. Muhammad Syaiful Firdaus Alfarisi dan Sarirazty Dwijantari yang selalu memberikan doa, semangat, dukungan, bantuan, serta cerita kepada penulis.
5. Guslina Ekasanti, Nur Fauziyah Hadiyatiningrum, Dewi Setyorini sahabat penulis dari SMP yang selalu memberikan doa dan motivasi kepada penulis.
6. Teman-teman *acceleration states* SMAN 3 Kediri yang selalu memberikan doa, semangat, dukungan, dan sebagai tempat penghilang penat selama ini.
7. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.

DAFTAR ISI

	Hal.
LEMBAR PENGESAHAN.	Error! Bookmark not defined.
Abstrak.....	vii
Abstract.....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xix
DAFTAR TABEL.....	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
BAB 1	
PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	5
BAB II	
TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Satelit.....	9
2.3 Orbit Satelit	11
2.3.1 Jenis orbit satelit.....	11
2.3.2 Perbedaan geosinkron dan geostasioner.....	12
2.3.3 GEO (Geostationery Earth Orbit).....	12

2.4 Gaya Dorong dan Sumber Energi Satelit	14
2.4 Model Matematika Gerak Satelit	15
2.4.1 Gaya pada arah radial	19
2.4.2 Gaya pada arah tangensial	20
2.4.3 Model persamaan sistem gerak satelit.....	20
2.5 Analisis Sistem	20
2.5.1 Titik kesetimbangan	20
2.5.2 Analisis kestabilan.....	21
2.5.3 Analisis keterkontrolan.....	21
2.5.4 Analisis keteramatan	22
2.6 Formulasi Masalah Kontrol Optimal.....	23
2.7 Prinsip Minimum Pontryagin	23
2.8 Metode Runge-Kutta Orde Empat.....	26
BAB III	
METODOLOGI PENELITIAN	27
3.1 Studi Literatur	27
3.2 Analisis Sistem Gerak Satelit	27
3.3 Formulasi Masalah Kontrol Optimal.....	28
3.4 Menentukan Penyelesaian Kontrol Optimal.....	28
3.5 Simulasi dengan Software Matlab.....	28
3.6 Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran.....	28
3.7 Penyusunan Laporan Tugas Akhir	29
BAB IV	
ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....	31
4.1 Analisis Sistem Gerak Satelit	31

4.1.1 Analisis kestabilan.....	34
4.1.2 Analisis keterkontrolan	36
4.1.3 Analisis keteramatan	38
4.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal.....	40
4.3 Penyelesaian dengan Prinsip Minimum Pontryagin	41
4.4 Solusi Numerik.....	45
4.5 Analisis Hasil Simulasi	51
BAB V	
PENUTUP	67
5.1 Kesimpulan	67
5.2 Saran.....	67
DAFTAR PUSTAKA	69
LAMPIRAN A	71
LAMPIRAN B	73
BIODATA PENULIS	81

DAFTAR GAMBAR

	Hal.
Gambar 2.1 Geostasioner dan Polar.....	10
Gambar 2.2 Manuver Satelit	15
Gambar 2.3 Ilustrasi Gerak Satelit pada Koordinat Kutub	16
Gambar 2.4 Ilustrasi Gerak Satelit pada Koordinat Kutub	16
Gambar 3.1 Diagram Alir Metodologi Penelitian.....	30
Gambar 4.1 Grafik x_1, x_2, x_3 , dan x_4 tanpa kontrol.....	52
Gambar 4.2 Jarak (x_1) dengan bobot $c_1 > c_2$	53
Gambar 4.3 Kecepatan (x_2) dengan bobot $c_1 > c_2$	54
Gambar 4.4 Sudut (x_3) dengan bobot $c_1 > c_2$	55
Gambar 4.5 Kecepatan sudut (x_4) dengan bobot $c_1 > c_2$	56
Gambar 4.6 Jarak (x_1) dengan bobot $c_1 < c_2$	57
Gambar 4.7 Kecepatan (x_2) dengan bobot $c_1 < c_2$	58
Gambar 4.8 Sudut (x_3) dengan bobot $c_1 < c_2$	59
Gambar 4.9 Kecepatan sudut (x_4) dengan bobot $c_1 < c_2$	60
Gambar 4.10 Jarak (x_1) dengan bobot $c_1 = c_2$	61
Gambar 4.11 Kecepatan (x_2) dengan bobot $c_1 = c_2$	62
Gambar 4.12 Sudut (x_3) dengan bobot $c_1 = c_2$	63
Gambar 4.13 Kecepatan sudut (x_4) dengan bobot $c_1 = c_2$	64

DAFTAR TABEL

	Hal.
Tabel 4.1 Nilai Parameter	51
Tabel 4.2 Nilai fungsi tujuan (J)	65

DAFTAR SIMBOL

σ	: sigma (konstanta jarak)
ω	: omega (konstanta kecepatan sudut)
F	: gaya
F_g	: gaya gravitasi bumi
F_r	: gaya dorong (radial) satelit
F_θ	: gaya dorong (tangensial) satelit
m	: massa satelit
M	: massa bumi
a	: percepatan satelit
a_r	: percepatan (radial) satelit
a_θ	: percepatan (tangensial) satelit
v	: kecepatan satelit
G	: konstanta gravitasi bumi
r	: jarak antara pusat bumi dan satelit
\vec{r}	: vektor posisi pada keadaan radial
\hat{r}	: unit vektor pada posisi radial
\dot{r}	: kecepatan radial satelit
\ddot{r}	: percepatan radial satelit
θ	: sudut yang dibentuk oleh pergerakan satelit
$\vec{\theta}$: vektor posisi pada keadaan tangensial
$\hat{\theta}$: unit vektor pada posisi tangensial
$\dot{\theta}$: kecepatan tangensial satelit
$\ddot{\theta}$: percepatan tangensial satelit
t_0	: waktu awal
t_f	: waktu akhir
λ	: lambda
$Re(\lambda)$: bagian real dari nilai eigen
M_c	: matriks keterkontrolan
M_o	: matriks keteramatan
I	: matriks identitas
J	: fungsi objektif (<i>performance index</i>)
λ	: pengali lagrange

u_1 : kontrol sistem arah radial
 u_2 : kontrol sistem arah tangensial
 c_1 : bobot kontrol system u_1
 c_2 : bobot kontrol system u_2
 H : Hamiltonian

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai hal-hal yang melatarbelakangi permasalahan pada Tugas Akhir. Kemudian, dijabarkan dalam rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat, serta sistematika penulisan dari Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Matematika sebagai pembentuk pola pikir analisis dan sistematis dalam kehidupan nyata merupakan alat untuk mengungkap atau menganalisa fenomena-fenomena alam sehingga dapat diterima oleh nalar manusia. Fenomena-fenomena tersebut seringkali dimodelkan dalam bahasa matematika kemudian dilakukan analisa secara matematis sehingga dapat diketahui solusi atau sifat dari solusi yang kemudian dibawa kembali atau diinterpretasikan kedalam kehidupan nyata, hal inilah yang dinamakan pemodelan matematika[1]. Salah satu contoh pemodelan matematika adalah sistem persamaan diferensial yang merepresentasikan gerak satelit.

Satelit adalah benda yang mengorbit benda lain dengan periode revolusi dan rotasi tertentu. Ada dua jenis satelit yakni satelit alami dan satelit buatan. Satelit alami adalah benda-benda luar angkasa bukan buatan manusia yang mengorbit sebuah planet atau benda lain yang lebih besar daripada dirinya, seperti misalnya bulan adalah satelit alami bumi. Sedangkan untuk satelit buatan adalah benda buatan manusia yang beredar mengelilingi benda lain misalnya satelit Palapa yang mengelilingi bumi. Satelit dapat dibedakan berdasarkan bentuk dan kegunaannya seperti: satelit cuaca, satelit komunikasi, satelit iptek dan satelit militer[2].

Satelit buatan pertama yang berhasil meluncur ke angkasa adalah milik Uni Soviet bernama Sputnik, bulan Oktober tahun 1957. Semenjak itu, Amerika segera meluncurkan satelitnya bernama Explorer-1. Kedua negara tersebut menjadi negara pertama dalam kecanggihan teknologi untuk memantau bumi lewat satelit ruang angkasa. Namun demikian modern ini, Rusia, Amerika, China, Eropa menjadi pemeran utama peluncuran satelit[3].

Satelit-satelit buatan tersebut diluncurkan menuju posisi tertentu yang tidak terpengaruh oleh gaya-gaya gravitasi dan hanya bergerak mengikuti pergerakan bumi. Posisi ini disebut sebagai posisi geostasioner. Jadi satelit geostasioner adalah satelit yang mengelilingi bumi dengan sudut inklinasi sama dengan nol dan dengan periode yang sama dengan periode rotasi bumi, sehingga satelit ini akan tampak diam (stasioner) dan tetap hanya pada satu titik tertentu dari permukaan bumi[4].

Dalam peredarannya, walaupun orbit geostasioner dapat menjaga suatu satelit berada pada tempat yang tetap di atas ekuator bumi, tetapi satelit pada orbit ini tidak akan selalu berada pada orbitnya dikarenakan adanya *perturbation* atau perturbasi orbital atau gangguan yang dapat menyebabkan satelit secara perlahan-lahan berpindah dari lokasi geostasionernya. Perturbasi orbital adalah fenomena di mana orbit satelit berubah akibat satu atau lebih pengaruh eksternal seperti anomali distribusi gravitasi bumi, gangguan gaya tarik dari bulan, benturan meteor atau benda-benda lain, atau tekanan radiasi matahari[5].

Perubahan atau perpindahan posisi satelit dari posisi geostasionernya tersebut menyebabkan terjadinya penyimpangan terhadap posisi satelit yang telah ditentukan yang dapat berdampak pada terjadinya interferensi (interaksi antar gelombang) antar satelit yang berdekatan sehingga mengakibatkan kesulitan dalam pengendalian dari stasiun

pengendali yang ada di bumi yang dapat berdampak pada terjadinya kehilangan pengawasan satelit[6].

Untuk mengembalikan satelit pada posisi semula memerlukan tindakan dari stasiun pengendali agar satelit tetap pada orbit yang seharusnya. Usaha yang dilakukan stasiun pengendali tersebut dinamakan *station keeping*[6]. *Station keeping* berupa manuver satelit yang terdiri dari manuver utara/selatan dan timur/barat. Dalam setiap kali manuver memerlukan untuk menghidupkan “thruster” yang menyebabkan gaya dorong untuk mengubah posisi satelit.

Sehingga dalam Tugas Akhir ini dibahas mengenai analisis dan kontrol optimal sistem gerak satelit untuk menstabilkan posisi satelit akibat gangguan atau pengaruh dari luar yang terjadi pada gerak satelit. Sehingga digunakan kontrol optimal dengan Prinsip Minimum Pontryagin.

Sistem kontrol pada gerak satelit pernah dibahas sebelumnya dalam buku *Mathematical System Theory Intermediate Third Edition* tahun 2004 oleh Olsder dan Van der Woude dan pada tahun 2009 juga dilakukan penelitian oleh Swesti Yunita Purwanti, Asep K. Supriatna, Nursanti Anggriani tentang Aplikasi Teori Kontrol dalam Linierisasi Model Persamaan Gerak Satelit.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, dapat dirumuskan beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan sistem gerak satelit.
2. Bagaimana kontrol optimal pada sistem gerak satelit menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.
3. Bagaimana simulasi program sistem gerak satelit sebelum dan setelah diberikan kontrol.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian Tugas Akhir ini, permasalahan yang dibahas dibatasi ruang lingkup pembahasannya sebagai berikut:

1. Pergerakan satelit yang diamati adalah pergerakan satelit buatan yang mengorbit bumi dengan orbit geostasioner.
2. Sistem satelit yang digunakan diamati dalam koordinat kutub yaitu secara radial dan tangensial.
3. Menggunakan kontrol optimal dengan Prinsip Minimum Pontryagin.

1.4 Tujuan

Tujuan dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui sistem gerak satelit apakah suatu sistem yang stabil, terkontrol, dan teramati.
2. Untuk mendapatkan kontrol optimal pada sistem gerak satelit dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.
3. Untuk mengetahui pengaruh kontrol optimal terhadap sistem gerak satelit.

1.5 Manfaat

Manfaat dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh pengetahuan sifat suatu model matematika pada sistem gerak satelit.
2. Memperoleh pengetahuan untuk menerapkan teori kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dalam sistem gerak satelit.
3. Sebagai referensi untuk mengetahui sistem gerak satelit dengan menstabilkan posisi satelit akibat pengaruh-pengaruh dari luar yang terjadi pada gerak satelit.

4. Sebagai referensi bagi pembaca dalam melakukan penelitian selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini berisi tentang teori dasar yang mendukung dalam penelitian Tugas Akhir, yaitu penelitian terdahulu, penjabaran mengenai satelit dan orbit satelit, model sistem gerak satelit, analisis sistem yang meliputi analisis kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan, kontrol optimal Prinsip Minimum Pontryagin, serta penyelesaian numerik metode Runge-Kutta orde empat.

3. **BAB III METODE PENELITIAN**

Bab ini menjelaskan tahapan-tahapan dan metode yang digunakan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir yaitu terdiri dari: studi literatur, analisis sistem gerak satelit, formulasi masalah kontrol optimal, menentukan penyelesaian kontrol optimal, simulasi dengan software Matlab, penarikan kesimpulan dan pemberian saran, serta penyusunan laporan Tugas Akhir.

4. **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini membahas tentang analisis sistem model gerak satelit, dengan terlebih dahulu mencari titik setimbang,

kemudian dilakukan analisis kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatannya. Selanjutnya adalah formulasi kontrol optimal yaitu pembentukan fungsi objektif dan syarat batas. Penyelesaian kontrol optimal dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin dengan mencari fungsi Hamiltonian, persamaan *state* dan *costate* yang nantinya diselesaikan secara numerik dengan metode Runge-Kutta orde empat kemudian disimulasikan dengan Matlab dan hasilnya dianalisa.

5. BAB V PENUTUP

Dalam bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai satelit dan orbit satelit, model sistem gerak satelit, analisis sistem yang meliputi analisis kestabilan, analisis keterkontrolan, dan analisis keteramatan disekitar titik setimbang, serta Prinsip Minimum Pontryagin dan metode Runge-Kutta orde empat untuk penyelesaian numerik.

2.1 Penelitian Terdahulu

Sistem kontrol pada gerak satelit pernah dibahas sebelumnya dalam buku *Mathematical System Theory Intermediate Third Edition* tahun 2004 oleh Olsder dan Van der Woude[7]. Dalam buku tersebut dibahas mengenai pembentukan model gerak satelit dengan menggunakan gaya-gaya yang terjadi pada satelit. Pada tahun 2009 juga dilakukan penelitian oleh Swesti Yunita Purwanti, Asep K. Supriatna, Nursanti Anggriani tentang Aplikasi Teori Kontrol dalam Linierisasi Model Persamaan Gerak Satelit[8]. Penelitian tersebut menjelaskan tentang pembentukan model gerak satelit dengan menggunakan vektor-vektor dan proses linierisasi model gerak satelit untuk menyelidiki keterkontrolan dan keteramatan sistem gerak satelit. Selanjutnya pada tahun 2014 telah dilakukan penelitian oleh Rizal Arrosyid tentang Pengendalian Gerak Satelit dengan Menggunakan Metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR)[9]. Penelitian tersebut membahas model matematika dan analisis dari sistem gerak satelit, dimana model yang dibentuk difokuskan pada pergerakan satelit geostasioner yang mengelilingi bumi, kemudian dari model yang sudah terbentuk, dilakukan analisis berupa kestabilan dan keterkontrolan sistem gerak satelit sebelum diberi kontrol, serta keadaan dinamik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol dengan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

Selanjutnya dari penelitian-penelitian yang sudah ada, penulis melakukan penelitian tentang sistem kontrol dari model sistem gerak satelit dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

Karena pada penelitian-penelitian sebelumnya belum dibahas pembentukan *performance index* (fungsi tujuan) dan energi optimal dalam menstabilkan posisi satelit pada lintasan semula (posisi geostasionernya).

Beberapa penelitian dengan menggunakan Prinsip Minimum/Maksimum Pontryagin yang pernah dilakukan sebelumnya antara lain oleh Putri Pradika Wanti pada tahun 2011 yaitu tentang Optimasi Energi Lokal pada Kendali Kereta Api dengan Lintasan Menanjak[10]. Penelitian tersebut menjelaskan bahwa meminimumkan energi yang digunakan pada kereta api sama halnya dengan meminimumkan pasokan bahan bakar untuk kereta api. Karena pasokan bahan bakar berbanding lurus dengan energi yang digunakan oleh kereta api. Pada penelitian tersebut digunakan teori kontrol optimal (Prinsip Minimum Pontryagin) untuk mencari solusi optimal pada permasalahan kecepatan yang dibutuhkan oleh kereta api pada saat melintasi lintasan menanjak (gradien curam).

Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Misbahur Khoir pada tahun 2014 yaitu Waktu Optimal dalam Diversifikasi Produksi Energi Terbarukan dan Tidak Terbarukan dengan Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin[11]. Pada penelitian tersebut dilakukan pengendalian terhadap tingkat produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan dengan tujuan mendapatkan waktu yang optimal dari pencapaian target produksi energi terbarukan dan tidak terbarukan.

Sedangkan dalam Tugas Akhir yang penulis lakukan adalah tentang Analisis dan Kontrol Optimal Sistem Gerak Satelit dengan Prinsip Minimum Pontryagin, dimana nantinya dilakukan analisis sistem terlebih dahulu yaitu kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan dari sistem gerak satelit. Selanjutnya dilakukan kontrol optimal dengan pembentukan *performance index* atau fungsi tujuan yaitu untuk menstabilkan posisi satelit akibat pengaruh-pengaruh dari luar yang terjadi pada gerak satelit. Kemudian dari *state* dan *costate* yang didapat diselesaikan secara

numerik dengan metode Runge-Kutta orde empat, karena galat yang dihasilkan metode ini cukup kecil.

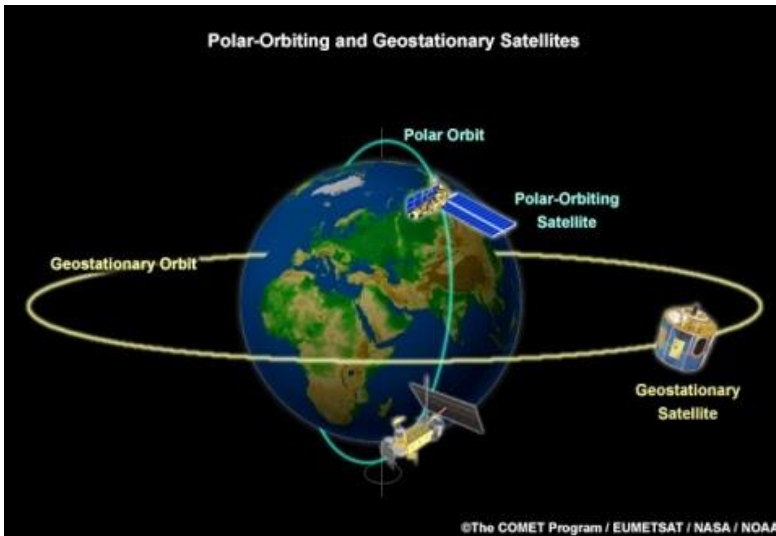
2.2 Satelit

Satelit adalah benda yang mengorbit benda lain dengan periode revolusi dan rotasi tertentu. Ada dua jenis satelit yaitu satelit alami dan satelit buatan. Satelit alami adalah salah satu benda luar angkasa yang telah ada (bukan buatan manusia) yang mengorbit suatu planet. Satelit alami bumi adalah bulan. Selama mengelilingi bumi, bulan mengalami tiga gerakan sekaligus, yaitu rotasi, revolusi bulan mengelilingi bumi dan revolusi bulan mengelilingi matahari. Sedangkan satelit buatan adalah salah satu benda luar angkasa buatan manusia yang mengorbit suatu planet yang dalam pembuatannya memiliki jenis dan fungsi tertentu dengan tujuan untuk kepentingan manusia. Berikut merupakan jenis-jenis satelit berdasarkan fungsinya[2]:

1. Satelit navigasi, berfungsi untuk penerbangan dan pelayaran. Satelit ini akan memberikan informasi posisi pesawat terbang dan kapal yang sedang dalam perjalanan.
2. Satelit geodesi, berfungsi untuk melakukan pemetaan bumi dan mendapatkan informasi tentang grafitasi.
3. Satelit komunikasi berfungsi untuk komunikasi seperti radio, televisi, dan telepon.
4. Satelit meteorologi, berfungsi untuk menyelidiki atmosfer bumi guna melakukan peramalan cuaca.
5. Satelit penelitian, berfungsi untuk menyelidiki tata surya dan alam semesta secara lebih bebas tanpa dipengaruhi oleh atmosfer. Satelit ini berusaha mendapatkan data-data tentang matahari dan bintang-bintang lain untuk mengungkap rahasia alam semesta.
6. Satelit militer, berfungsi untuk kepentingan militer suatu negara, misalnya mengintai kekuatan senjata lawan.
7. Satelit survei sumber daya alam, berfungsi untuk memetakan dan menyelidiki sumber-sumber alam di bumi bagi

kepentingan pertambangan, pertanian, perikanan dan lain-lain.

Sedangkan berdasar mekanisme orbitnya, satelit dibagi menjadi satelit geostasioner dan non-geostasioner. Satelit geostasioner adalah satelit yang mengelilingi bumi dengan sudut inklinasi sama dengan nol dan dengan periode yang sama dengan periode rotasi bumi, sehingga satelit ini akan tampak diam (stasioner) dan tetap hanya pada satu titik tertentu dari permukaan bumi. Satelit non-geostasioner adalah satelit yang mengorbit bumi dengan sudut inklinasi tertentu dan parameter-parameter elemen orbit lain yang juga ditentukan. Orbit non-geostasioner akan memiliki kecepatan dan arah pergerakannya sendiri sesuai dengan elemen orbitnya. Oleh karena itu lokasi satelit non-geostasioner akan selalu berubah jika dipandang dari suatu titik di permukaan bumi[12]. Orbit polar adalah termasuk salah satu di dalam orbit non-geostasioner.



Gambar 2.1 Geostasioner dan Polar

2.3 Orbit Satelit

Orbit merupakan jenis-jenis tempat beredarnya satelit mengelilingi permukaan bumi. Dalam Konteks Geodesi satelit, informasi tentang orbit satelit akan berperan dalam beberapa hal yaitu[2]:

Position Determination

Untuk menghitung koordinat satelit yang nantinya diperlukan sebagai koordinat titik tetap dalam perhitungan koordinat titik-titik lainnya di atau dekat permukaan bumi.

Observation Planning

Untuk merencanakan pengamatan satelit (waktu dan lama pengamatan yang optimal)

Receiver Aiding

Membantu mempercepat alat pengamat (*Receiver*) sinyal satelit untuk menemukan satelit yang bersangkutan

Satellite Selection

Untuk memilih, jika diperlukan, satelit-satelit yang secara geometrik “lebih baik” untuk digunakan.

2.3.1 Jenis orbit satelit

Jika diklasifikasikan berdasarkan posisi satelit pada orbitnya, maka satelit-satelit buatan dibedakan menjadi 5 ketinggian, antara lain[13]:

1. Orbit Rendah (*Low Earth Orbit, LEO*): 300 – 1500 km di atas permukaan bumi.
2. Orbit Menengah (*Medium Earth Orbit, MEO*): 1500 – 36000 km.
3. Orbit Geosinkron (*Geosynchronous Orbit, GSO*): sekitar 36000 km di atas permukaan bumi.

4. Orbit Geostasioner (*Geostationary Orbit, GEO*): 35790 km di atas permukaan bumi.
5. Orbit Tinggi (*High Earth Orbit, HEO*): di atas 36000 km.

2.3.2 Perbedaan geosinkron dan geostasioner

Orbit Geosinkron adalah orbit suatu benda (dalam hal ini satelit buatan) dengan bumi sebagai pusatnya, yang mempunyai periode sama dengan rotasi bumi yaitu satu hari sideris atau 23,9344 jam. Satelit dengan orbit geosinkron akan berada di atas suatu titik di muka bumi pada jam tertentu. Selain dari waktu tersebut satelit akan tampak bergeser relatif terhadap titik itu. Jika satelit geosinkron mempunyai bentuk orbit lingkaran sempurna dan mengorbit sebidang dengan garis katulistiwa maka dilihat dari bumi satelit itu akan tampak diam, orbit yang demikian disebut orbit geostasioner[5].

Orbit Geostasioner adalah orbit geosinkron yang berada tepat di atas ekuator bumi (0° lintang), dengan eksentrisitas orbital (jumlah ketika orbitnya melenceng dari lingkaran sempurna) sama dengan nol. Dari permukaan bumi, objek yang berada di orbit geostasioner akan tampak diam (tidak bergerak) di angkasa karena periode orbit objek tersebut mengelilingi bumi sama dengan periode rotasi bumi. Orbit ini sangat diminati oleh operator-operator satelit buatan (termasuk satelit komunikasi dan televisi). Karena letaknya konstan pada lintang 0° , lokasi satelit hanya dibedakan oleh letaknya di bujur bumi.

2.3.3 GEO (*Geostationery Earth Orbit*)

Satelit GEO merupakan sebuah satelit yang ditempatkan dalam orbit yang posisinya tetap dengan posisi suatu titik di bumi. Karena mempunyai posisi yang tetap maka waktu edarnya pun sama dengan waktu rotasi bumi. Posisi orbit satelit GEO sejajar dengan garis khatulistiwa atau mempunyai titik lintang nol derajat.

Sebuah orbit geostasioner, atau *Geostationary Earth Orbit* (GEO), adalah orbit lingkaran yang berada 35.786 km (22.236 mil) di atas ekuator bumi dan mengikuti arah rotasi bumi. Sebuah objek

yang berada pada orbit ini akan memiliki periode orbit sama dengan periode rotasi bumi, sehingga terlihat diam (stasioner), pada posisi tetap di langit, bagi pengamat di bumi. Satelit komunikasi dan satelit cuaca sering diorbitkan pada orbit geostasioner, sehingga antena satelit yang berkomunikasi dengannya tidak harus berpindah untuk melacaknya, tetapi dapat menunjuk secara permanen pada posisi di langit di mana mereka berada. Sebuah orbit geostasioner adalah satu tipe orbit geosynchronous. Gagasan tentang sebuah satelit geosynchronous untuk tujuan komunikasi pertama kali diterbitkan pada tahun 1928 oleh Herman Potocnik[2].

Walaupun orbit geostasioner dapat menjaga suatu satelit berada pada tempat yang tetap di atas ekuator bumi, **perturbasi orbital** dapat menyebabkan satelit secara perlahan-lahan berpindah dari lokasi geostasioner. Perturbasi orbital adalah fenomena di mana orbit satelit berubah akibat satu atau lebih pengaruh eksternal seperti anomali distribusi gravitasi bumi, gangguan gaya tarik dari bulan, benturan meteor atau benda-benda lain, atau tekanan radiasi matahari[5].

Kelebihan GEO

1. Stasiun pengendali tidak harus setiap saat melakukan *track* terhadap satelit.
2. Hanya beberapa satelit cukup meng-*cover* seluruh lapisan bumi.
3. Maksimal *lifetime* 15 tahun atau lebih.

Kekurangan GEO

1. Delay propagasi yang cukup besar, berkisar antara 250 milidetik.
2. Proses peluncuran satelit mahal karena berada pada orbit yang jauh. Antena penerima pada stasiun bumi harus berdiameter besar agar dapat menangkap sinyal/frekuensi yang dipancarkan.

Karakteristik GEO

1. Tinggi orbit: sekitar 35.800 km, di atas permukaan bumi
2. Periode Orbit: 24 jam
3. Kecepatan putar: 11.000 km/jam
4. Waktu Tampak: Selalu tampak (karena kecepatan putar satelit sama dengan kecepatan putar bumi)
5. Delay Time: 250 ms (waktu perambatan gelombang dari stasiun bumi ke satelit dan kembali lagi ke stasiun bumi)
6. Jumlah Satelit: 3
7. Penggunaan: Banyak digunakan oleh satelit untuk sistem telekomunikasi tetap, seperti Palapa, Intelsat, Asiasat, dll.

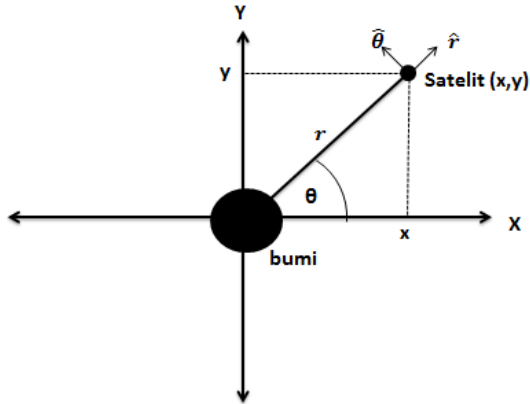
2.4 Gaya Dorong dan Sumber Energi Satelit

Satelit-satelit buatan diluncurkan ke luar angkasa menuju posisi tertentu yaitu posisi geostasioner yang tidak terpengaruh oleh gaya-gaya gravitasi dan hanya bergerak mengikuti pergerakan bumi. Awalnya untuk menuju posisi geostasioner tersebut, satelit mendapatkan energi dari proses peluncuran dengan roket. Setelah itu satelit akan terus mengorbit walaupun tanpa bantuan dorongan apapun.

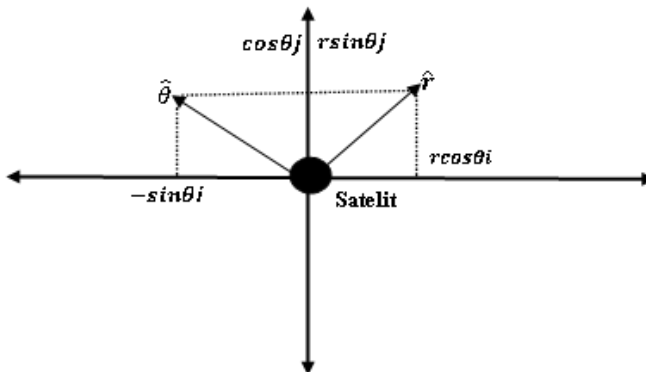
Selanjutnya dalam peredaran satelit, walaupun orbit geostasioner dapat menjaga suatu satelit berada pada tempat yang tetap di atas ekuator bumi, tetapi satelit pada orbit ini tidak akan selalu berada pada orbitnya dikarenakan adanya *perturbation* atau perturbasi orbital atau gangguan yang dapat menyebabkan satelit secara perlahan-lahan berpindah dari posisi geostasionernya.

Untuk mengembalikan satelit pada posisi geostasionernya memerlukan tindakan dari stasiun pengendali agar satelit tetap pada orbit yang seharusnya. Usaha yang dilakukan stasiun pengendali tersebut dinamakan *station keeping*. *Station keeping* berupa manuver satelit (suatu bentuk kemampuan satelit untuk dapat melakukan gerakan yaitu perubahan posisi dan kecepatan) yang terdiri dari manuver utara/selatan dan timur/barat. Dalam setiap kali manuver, satelit memerlukan energi untuk

satelit tersebut diamati secara radial/searah dengan pengamat (menjauhi atau mendekati pengamat) dan searah tangensial (gerak melingkari bumi)[9].



Gambar 2.3 Ilustrasi Gerak Satelit pada Koordinat Kutub (Bumi)



Gambar 2.4 Ilustrasi Gerak Satelit pada Koordinat Kutub (Satelit)

Diketahui:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r}$$

$$\vec{\theta} = \theta \cdot \hat{\theta}$$

\hat{r} dan $\hat{\theta}$ adalah unit vektor satelit pada arah radial dan tangensial dengan θ , \vec{r} , \hat{r} , r adalah fungsi waktu.

Dengan demikian didapatkan hubungan antara \hat{r} dengan $\hat{\theta}$ sebagai berikut:

a. Unit vektor posisi radial satelit pada keadaan radial

$$\hat{r} = \frac{1}{r} \vec{r} = \frac{1}{r} (r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}) = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (2.1)$$

b. Unit vektor posisi satelit pada keadaan tangensial

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (2.2)$$

Persamaan (2.1) dan (2.2) dideferensialkan terhadap waktu, sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \\ &= \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \\ &= \dot{\theta} \hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \\ &= \dot{\theta} (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) \\ &= -\dot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \\ &= -\dot{\theta} \hat{r} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan mendiferensialkan $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$ maka dapat dicari persamaan kecepatan dari satelit.

Misal:

$$u = r \text{ maka } u' = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$v = \hat{r} \text{ maka } v' = \frac{d\hat{r}}{dt}$$

Sehingga diperoleh persamaan kecepatan pada satelit adalah sebagai berikut:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.3) didapatkan:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (2.5)$$

dengan \dot{r} adalah kecepatan pada arah radial dan $r\dot{\theta}$ adalah kecepatan pada arah tangensial.

Selanjutnya mendiferensialkan persaaan (2.5) untuk mencari persamaan percepatan dari satelit.

Misal:

$$u_1 = \dot{r} \text{ maka } u_1' = \frac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r}$$

$$u_2 = r \text{ maka } u_2' = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$v_1 = \hat{r} \text{ maka } v_1' = \frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$v_2 = \dot{\theta}\hat{\theta} \text{ maka } v_2' = \ddot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

Sehingga diperoleh persamaan percepatan dari satelit adalah sebagai berikut:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = u_1'v_1 + u_1v_1' + u_2'v_2 + u_2v_2'$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r}) \\
&= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dari persamaan (2.6) dapat didefinisikan percepatan pada arah radial dan tangensial sebagai berikut:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{2.7}$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \tag{2.8}$$

Selanjutnya untuk menentukan gaya-gaya yang terjadi pada satelit maka digunakan Hukum II Newton yaitu besar gaya yang bekerja pada sebuah benda akan sebanding dengan massa benda dan percepatan benda tersebut.

$$F = m \cdot a \tag{2.9}$$

2.4.1 Gaya pada arah radial

Gaya yang bekerja pada arah radial (F_r) adalah gaya dorong yang arahnya menjauhi bumi dan gaya gravitasi yang menarik satelit menuju bumi (F_g). Karena gaya gravitasi memiliki arah yang berlawanan dengan gaya dorong maka diberikan notasi “ - “.

Dengan mensubstitusikan percepatan radial yang sudah didapatkan pada persamaan (2.7) ke persamaan (2.9), maka diperoleh persamaan gaya pada arah radial adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
F &= m \cdot a_r \\
F_r - F_g &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\
Fr - G \frac{Mm}{r^2} &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.4.2 Gaya pada arah tangensial

Gaya yang bekerja pada arah tangensial (F_θ) adalah gaya dorong. Dengan mensubstitusikan percepatan tangensial yang sudah didapatkan pada persamaan (2.8) ke persamaan (2.9), maka persamaan gaya pada arah tangensial adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a_\theta \\ F_\theta &= m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.4.3 Model persamaan sistem gerak satelit

Dari persamaan gaya pada arah radial dan pada arah tangensial, sistem persamaan gerak pada satelit dapat dituliskan:

$$\begin{cases} m(\ddot{r}(t) - r(t) \cdot \dot{\theta}^2(t)) = F_r - G \frac{Mm}{r^2(t)} \\ m(2\dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t) + r(t) \cdot \ddot{\theta}(t)) = F_\theta \end{cases} \quad (2.12)$$

Misalkan $g = GM$, $u_1(t) = \frac{Fr}{m}$, $u_2(t) = \frac{F_\theta}{m}$, dan $r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ adalah fungsi waktu, maka sistem persamaan gerak satelit (2.10) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = r(t) \cdot \dot{\theta}^2(t) - \frac{g}{r^2(t)} + u_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{-2\dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)} u_2(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

2.5 Analisis Sistem

Analisis dinamik model dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem pada model. Pada penelitian ini dianalisis mengenai kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan sistem.

2.5.1 Titik kesetimbangan

Titik kesetimbangan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu.

Definisi 2.1[14]

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari suatu sistem jika $f(\bar{x}) = 0$.

2.5.2 Analisis kestabilan

Karena model pada penelitian ini bersifat nonlinier, sehingga untuk melakukan analisis kestabilannya adalah dengan menggunakan cara menganalisis transformasi kestabilan lokal disekitar titik setimbangannya. Untuk melakukan analisis transformasi kestabilan lokal yaitu mencari suatu hampiran di sekitar titik setimbangannya terlebih dahulu.

Teorema 2.1[15]

Diberikan persamaan differensial $\dot{x} = Ax$ dengan matriks A berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($k \leq n$).

a. Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik bila dan hanya bila $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.

b. Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah stabil bila dan hanya bila $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometrinya.

c. Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil bila dan hanya bila $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ dan multiplisitas aljabar lebih besar dari multiplisitas geometrinya.

2.5.3 Analisis keterkontrolan

Keterkontrolan sistem bermanfaat dalam menstabilkan sistem. Selain itu, solusi dari suatu permasalahan kontrol optimal mungkin tidak akan diperoleh jika sistem yang bersangkutan tidak terkontrol. Maka perlu dianalisa keterkontrolan sistem.

Teorema 2.2[15]

Jika terdapat persamaan matriks state sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Syarat perlu dan cukup sistem terkontrol adalah:

Matriks $M_c = ([B \ AB \ A^2B \ A^3B \ \dots \ A^{n-1}B])$ mempunyai rank yang sama dengan n .

2.5.4 Analisis keteramatan

Berikut ini akan diberikan definisi dari keteramatan yang merupakan *dual* dari keterkontrolan.

Definisi 2.2[15]

Bila setiap keadaan awal $q(0) = q_0$ secara tunggal dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem dari waktu $t = 0$ ke $t = t_1$, maka sistem dikatakan teramati.

Istilah *dual* di atas, kata ‘terkontrol’ diganti dengan ‘teramati’ masukan $x(t)$ diganti dengan keluaran $y(t)$, yaitu dalam terminologi keterkontrolan sebarang keadaan awal q_0 dikontrol dengan suatu masukan $x(t)$ ke sebarang keadaan akhir q_1 dimana $0 \leq t \leq t_1$, sedangkan dalam terminologi keteramatan sebarang keadaan awal q_0 lewat sebarang pengukuran keluaran $y(t)$ diamati pada interval waktu $0 \leq t \leq t_1$. Terdapat syarat perlu dan syarat cukup untuk sistem yang teramati, yaitu:

Teorema 2.3[15]

Berdasarkan persamaan (2.14), syarat suatu sistem teramati jika matriks keteramatan

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

mempunyai rank yang sama dengan n .

2.6 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari pengendalian optimal adalah menentukan signal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa konstrain atau kendala, dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai[16].

Pada umumnya, masalah kendali optimal dalam bentuk ungkapan matematik dapat diformulasikan sebagai berikut, dengan tujuan mencari kontrol $u(t)$ yang mengoptimalkan fungsi tujuan.

$$J(x) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.15)$$

dengan sistem dinamik yang dinyatakan oleh

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.16)$$

dan kondisi batas

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f \quad (2.17)$$

2.7 Prinsip Minimum Pontryagin

Penyelesaian masalah kendali optimal dengan menggunakan metode tidak langsung dilakukan dengan menyelesaikan kondisi perlu kendali optimal. Berdasarkan prinsip maksimum/minimum pontryagin, kondisi perlu dari masalah kendali optimal yang harus diselesaikan adalah persamaan stasioner, state dan costate serta kondisi transversality.

Langkah-langkah penyelesaian dari masalah kendali optimal yang diformulasikan oleh persamaan (2.15) - (2.17) adalah sebagai berikut[16]:

1. Bentuk Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t)$$

2. Minimumkan H terhadap $u(t)$ yaitu dengan cara:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

sehingga diperoleh kondisi stasioner

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Dengan menggunakan $u^*(t)$ yang telah dihasilkan pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamilton baru yang optimal, $H^*(t)$, yaitu:

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = H(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan persamaan state dan costate

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda} \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$$

dengan kondisi batas yang diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir yang disebut kondisi transversality, yaitu:

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)'_{t_f} \delta x_f = 0$$

dengan S adalah bentuk Meyer dari fungsi tujuan J , H adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda $*$ menunjukkan keadaan saat variabel kontrolnya stasioner.

5. Substitusi hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 ke dalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali yang optimal.

Kondisi batas transversality dibedakan menjadi lima tipe berdasarkan perbedaan antara t_f dan state pada waktu akhir ($x(t_f)$), yaitu:

1. Waktu akhir dan state saat waktu akhir telah ditentukan atau diketahui.

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = x_f$$

2. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat waktu akhir telah ditentukan atau diketahui.

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = x_f$$

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{tf} = 0$$

3. Waktu akhir telah ditentukan atau diketahui sedangkan state saat waktu akhir belum diketahui atau tidak ditentukan.

$$x(t_0) = x_0$$

$$\lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{*tf}$$

4. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan nilainya bergantung pada sesuatu.

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = \theta(t_f)$$

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right)' \dot{\theta}(t)\right)_{tf} = 0$$

5. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan nilainya tidak bergantung pada sesuatu.

$$\delta x(t_0) = x_0$$

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{tf} = 0$$

$$\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right)_{tf} = 0$$

2.8 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal dalam persamaan diferensial. Metode Runge-Kutta memberikan error yang lebih kecil dibanding dengan metode numerik yang lain seperti metode Euler dan metode Heun. Metode Runge-Kutta orde empat banyak digunakan karena memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi.

Misal diberikan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.18)$$

syarat batas $y(x_0) = y_0$. Secara iterasi penyelesaian Runge-Kutta orde empat adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.19)$$

dengan,

$$h = \Delta x$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3)$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Kegiatan penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas: studi literatur, analisis sistem gerak satelit, formulasi masalah kontrol optimal, menentukan penyelesaian kontrol optimal, simulasi dengan software matlab, penarikan kesimpulan dan pemberian saran, serta penyusunan laporan Tugas Akhir.

3.1 Studi Literatur

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan studi literatur dari beberapa buku, jurnal, penelitian, *paper*, maupun artikel dari internet mengenai referensi gerak pada satelit, model matematika sistem gerak satelit, analisis sistem yang meliputi kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan, serta teori kontrol optimal dengan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

3.2 Analisis Sistem Gerak Satelit

Pada tahap kedua akan dianalisis mengenai model matematika pada sistem gerak satelit, yaitu menganalisa kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan sistem. Langkah pertama yang dilakukan dalam analisis sistem adalah mencari titik setimbang. Kemudian dilakukan pelinieran karena sistem gerak satelit adalah sistem nonlinier hingga terbentuk matriks Jacobian yang selanjutnya dapat dianalisis sistem tersebut stabil atau tidak berdasarkan nilai eigen yang didapatkan. Untuk menganalisis keterkontrolannya dapat dilakukan dengan membentuk matriks keterkontrolan dan menentukan jumlah *rank* dari matriks tersebut. Begitu pula untuk menganalisis keteramatan suatu sistem dengan membentuk matriks keteramatan kemudian menentukan jumlah *rank* dari matriks tersebut.

3.3 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Dalam tahap ini dilakukan perancangan masalah kontrol optimal dari model matematika sistem gerak satelit yang meliputi membentuk fungsi objektif serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

3.4 Menentukan Penyelesaian Kontrol Optimal

Dalam tahap ini dilakukan penyelesaian kontrol optimal. Karena telah diformulasikan masalah kontrol optimal, maka langkah selanjutnya yaitu penyelesaian kontrol optimal dari model matematika sistem gerak satelit dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini sebagai berikut:

- Membentuk fungsi Hamiltonian
- Menentukan persamaan *state* dan *costate*
- Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi
- Menentukan kontrol optimal.

3.5 Simulasi dengan Software Matlab

Dalam tahap ini, dicari solusi numerik (menggunakan Runge-Kutta orde empat) dari permasalahan kontrol optimal pada model sistem gerak satelit dengan memanfaatkan persamaan *state*, *costate*, persamaan kontrol optimal serta kondisi-kondisi yang harus terpenuhi. Kemudian disimulasikan untuk melihat pengaruh kontrol sistem pada grafik yang dihasilkan dengan menggunakan software MATLAB versi R2010a keatas.

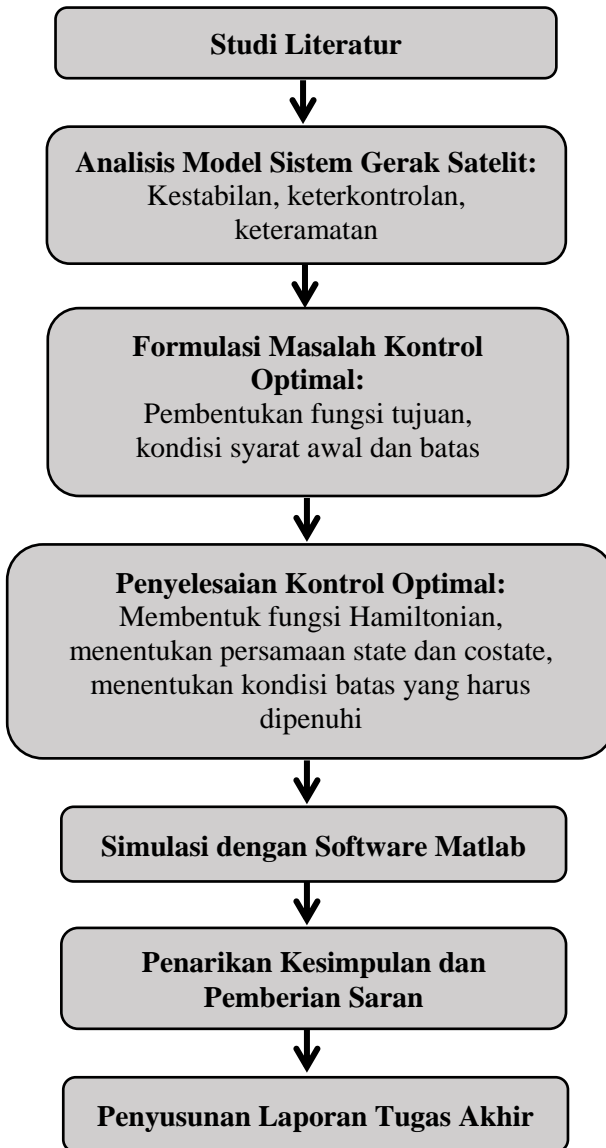
3.6 Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Dari hasil pada tahap-tahap sebelumnya, maka penarikan kesimpulan dari penelitian ini dapat dilakukan sekaligus pemberian saran guna perbaikan dan pengembangan untuk penelitian selanjutnya.

3.7 Penyusunan Laporan Tugas Akhir

Pada tahap ini dilakukan penyusunan Tugas Akhir setelah mendapatkan penyelesaian dan simulasi serta penarikan kesimpulan dari topik ini.

Berikut adalah gambar diagram alir metode penelitian pada Tugas Akhir ini:



Gambar 3.1 Diagram Alir Metodologi Penelitian

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan ditentukan kontrol optimal dari model sistem gerak satelit. Namun, sebelum menentukan kontrol optimalnya, terlebih dahulu dilakukan analisa sistem terhadap model tersebut, yang meliputi mencari titik kesetimbangan, analisis kestabilan, keterkontrolan, dan keteramatan. Selanjutnya dicari penyelesaian kontrol optimalnya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dan diselesaikan secara numerik, serta hasilnya akan disimulasikan dengan menggunakan software MATLAB.

4.1 Analisis Sistem Gerak Satelit

Pada penelitian ini digunakan model sistem gerak satelit yang dihasilkan pada persamaan (2.13) sebagai berikut:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{g}{r^2(t)} + u_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{-2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2(t) \end{cases}$$

Jika diberikan $u_1(t) = u_2(t) = 0$, konstan σ dan ω memenuhi $g = \sigma^3\omega^2$ sehingga didapatkan titik setimbang dari model sistem gerak satelit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) &= 0 \\ r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{\sigma^3\omega^2}{r^2(t)} + 0 &= 0 \\ r^3(t)\dot{\theta}^2(t) &= \sigma^3\omega^2 \end{aligned}$$

didapat, $r(t) = \sigma$ dan $\dot{\theta}(t) = \omega$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) &= 0 \\ \frac{-2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + 0 &= 0 \\ \frac{-2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} &= 0\end{aligned}$$

karena $r(t) \neq 0$ dan $\dot{\theta}(t) \neq 0$ maka didapatkan $\dot{r}(t) = 0$

Selanjutnya dilakukan transformasi sistem gerak satelit dengan memisalkan suatu vektor baru. Diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}r(t) &= \sigma & \theta(t) &= \omega t \\ \dot{r}(t) &= 0 & \dot{\theta}(t) &= \omega \\ \ddot{r}(t) &= 0 & \ddot{\theta}(t) &= 0\end{aligned}$$

Sehingga vektor baru yang dapat diambil adalah:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r(t) - \sigma \\ x_2(t) &= \dot{r}(t) \\ x_3(t) &= \sigma(\theta(t) - \omega t) \\ x_4(t) &= \sigma(\dot{\theta}(t) - \omega) \\ \text{dengan } \sigma &= 1\end{aligned}$$

Berdasarkan $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ diatas maka diperoleh $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t)$ sebagai berikut:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{r}(t) = \dot{r} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= \ddot{r}(t) = \ddot{r} \\ &= 3\sigma\omega^2 - 2\sigma\omega^2 + (-3\sigma\omega^2 + 2\sigma\omega^2) + u_1 \\ &= (3\sigma\omega^2 - 3\sigma\omega^2) + (2\sigma\omega^2 - 2\sigma\omega^2) + u_1 \\ &= 3\omega^2(\sigma - \sigma) + 2\sigma\omega(\omega - \omega) + u_1 \\ &= 3\omega^2(r - \sigma) + 2\sigma\omega(\dot{\theta} - \omega) + u_1\end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\dot{x}_3(t) = \sigma(\dot{\theta} - \omega) \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_4(t) = \sigma \ddot{\theta}$$

dengan mensubstitusi $\ddot{\theta} = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{1}{r}u_2$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\dot{x}_4(t) &= \sigma \left(-\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{1}{r}u_2 \right) \\ &= \sigma \left(-\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}u_2 \right) \\ &= -2\omega\dot{r} + u_2\end{aligned}\tag{4.21}$$

Persamaan (4.18) – (4.21) diatas dapat ditulis ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{r} \\ 3\omega^2(r - \sigma) + 2\sigma\omega(\dot{\theta} - \omega) + u_1 \\ \sigma(\dot{\theta} - \omega) \\ -2\omega\dot{r} + u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r - \sigma \\ \dot{r} \\ \sigma(\dot{\theta} - \omega t) \\ \sigma(\dot{\theta} - \omega t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_1(t) \\ 0 \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.22}$$

Sehingga matriks (4.22) dapat dipandang sebagai suatu sistem linier $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan y_1 adalah pengukuran terhadap jarak antara pusat satelit dengan pusat bumi dan y_2 sebagai pengukuran sudut yang dibentuk dari pergerakan satelit yang dapat diukur sedemikian hingga $x_1(t) = r(t) - \sigma$, $x_3(t) = \sigma(\theta(t) - \omega t)$ juga dapat diukur. Maka output gerak satelit dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + [0]u \quad (4.23)$$

dengan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = [0]$$

4.1.1 Analisis kestabilan

Untuk menentukan tipe kestabilan sistem gerak satelit digunakan teorema 2.1 yaitu dengan mencari nilai eigennya.

Diberikan fungsi karakteristik dari matriks \mathbf{A} sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari determinan dari $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama diperoleh:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2\omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3\omega^2 & 0 & 2\omega \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(-\lambda^3 - 4\omega^2\lambda) - (3\omega^2\lambda^2) = 0$$

$$\lambda^4 + 4\omega^2\lambda^2 - 3\omega^2\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^4 + \omega^2\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + \omega^2) = 0$$

$$\lambda^2 = 0 \text{ atau } \lambda^2 = -\omega^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_{3,4} = \sqrt{-\omega^2}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \omega i, \lambda_4 = -\omega i$$

Diperoleh 4 buah nilai eigen yaitu $(0, 0, \omega i, -\omega i)$ yang memiliki $Re(\lambda_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ sedemikian sehingga menurut teorema 2.1 sistem gerak satelit adalah sistem yang stabil jika multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometrinya, sedangkan sistem dikatakan tidak stabil jika multiplisitas aljabarnya lebih besar dari multiplisitas geometri.

Selanjutnya dilakukan analisis terhadap multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri.

Untuk $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Terlihat bahwa multiplisitas aljabarnya adalah 2 dan multiplisitas geometrinya adalah 1, sehingga multiplisitas aljabar lebih dari multiplisitas geometri, maka menurut teorema 2.1 dapat disimpulkan sistem gerak satelit adalah sistem yang tidak stabil.

4.1.2 Analisis keterkontrolan

Pada transformasi sistem gerak satelit diatas telah diketahui matriks A dan matriks B sedemikian sehingga

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari *Rank* dari $M_c = ([B \ AB \ A^2B \ A^3B])$.

Untuk matriks **AB** diperoleh:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\omega \\ 0 & 1 \\ -2\omega & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya disisalkan nilai dari hasil perkalian matriks A dan B tersebut dengan F .

$$\begin{aligned}
 A^2 B &= [A][AB] \\
 &= [A][F] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\omega \\ 0 & 1 \\ -2\omega & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 2\omega \\ -\omega^2 & 0 \\ -2\omega & 0 \\ 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya disisalkan nilai dari hasil perkalian matriks A dan F tersebut dengan G .

$$\begin{aligned}
 A^3 B &= [A][A^2 B] \\
 &= [A][G] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2\omega \\ -\omega^2 & 0 \\ -2\omega & 0 \\ 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -2\omega^3 \\ 0 & -4\omega^2 \\ 2\omega^3 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya disisalkan nilai dari hasil perkalian matriks A dan G tersebut dengan H .

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 M_c &= [B F G H] \\
 &= \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Dengan didapatkannya matriks keterkontrolan diatas, maka dapat diamati bahwa $rank(M_c) = 4$, sehingga menurut teorema 2.2 sistem gerak satelit adalah sistem yang terkontrol.

4.1.3 Analisis keteramatan

Pada transformasi sistem gerak satelit diatas telah diketahui matriks **A** dan matriks **C** sedemikian sehingga

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari *Rank* dari $M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$. Untuk matriks **CA**

diperoleh:

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dimisalkan nilai dari hasil perkalian matriks **C** dan **A** tersebut dengan **P**.

$$CA^2 = [CA][A]$$

$$= [P][A]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dimisalkan nilai dari hasil perkalian matriks P dan A tersebut dengan Q .

$$\begin{aligned}
 CA^3 &= [CA^2][A] \\
 &= [Q][A] \\
 &= \begin{bmatrix} 3\omega^2 & 1 & 0 & 2\omega \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dimisalkan nilai dari hasil perkalian matriks Q dan A tersebut dengan S .

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \begin{bmatrix} C \\ P \\ Q \\ S \end{bmatrix} \\
 M_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dengan didapatkannya matriks keteramatan diatas, maka dapat dilihat bahwa $rank(M_0) = 4$, sehingga menurut teorema 2.3 sistem gerak satelit adalah sistem yang teramati.

4.2 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Pada penelitian ini tujuan dari penyelesaian kontrol optimal adalah untuk menstabilkan posisi satelit pada posisi geostasionernya dengan kontrol ($u_1(t)$) dan kontrol ($u_2(t)$). Sehingga sistem dinamik dari sistem persamaan gerak satelit (4.22) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x(t), u(t), t) \\ &= x_2\end{aligned}\tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= f_2(x(t), u(t), t) \\ &= x_1 x_4^2 - \frac{\sigma^3 \omega^2}{x_1^2} + u_1\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= f_3(x(t), u(t), t) \\ &= x_4\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_4(t) &= f_4(x(t), u(t), t) \\ &= -\frac{2x_2 x_4 + u_2}{x_1}\end{aligned}\tag{4.27}$$

dengan $0 \leq u_1 \leq 1$ dan $0 \leq u_2 \leq 1$.

Fungsi tujuan untuk model diatas diberikan sebagai berikut:

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2)$$

Dari model diatas menunjukkan fungsi energi yang berhubungan dengan sistem gerak satelit. Parameter c_1 dan c_2 adalah bobot pada kontrol gaya dorong radial per massa dan bobot pada gaya dorong tangensial per massa, dengan bobot c_1 dan c_2 yaitu berupa impuls dikali waktu per satuan jarak.

Jika satelit akan dikembalikan posisinya ke posisi geostasionernya setelah terkena pengaruh atau gangguan, maka sebuah *vektoring* roket atau “thruster” akan dihidupkan secara impuls (memberikan gaya dorong sesaat) sehingga satelit akan mengalami percepatan atau perlambatan yang mengubah arah dan besar kecepatan serta posisinya.

Berdasarkan kondisi tersebut maka diperlukan adanya suatu kontrol optimal untuk menstabilkan posisi satelit akibat gangguan atau pengaruh dari luar yang terjadi pada gerak satelit. Sehingga dengan model sistem dinamik pada persamaan (2.24) – (2.27) akan didapatkan kontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ yang optimal sehingga mampu meminimalkan fungsi tujuan tersebut.

4.3 Penyelesaian dengan Prinsip Minimum Pontryagin

Masalah kontrol optimal pada sistem gerak satelit ini diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Adapun langkah-langkah penyelesaian kontrol optimal sistem gerak satelit dengan Prinsip Minimum Pontryagin adalah sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned}
 H(x(t), u(t), \lambda(t), t) &= V(x(t), u(t), t) + \\
 &\quad \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \\
 &= \frac{1}{2} (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2) + \lambda_1(x_2) + \\
 &\quad \lambda_2 \left(x_1 x_4^2 - \frac{\sigma^3 \omega^2}{x_1^2} + u_1 \right) + \lambda_3(x_4) + \\
 &\quad \lambda_4 \left(-\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{x_1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} c_1 u_1^2 + \frac{1}{2} c_2 u_2^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 x_4^2 - \\
 &\quad \frac{\sigma^3 \omega^2}{x_1^2} \lambda_2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 x_4 - \\
 &\quad \frac{2x_2 x_4 + u_2}{x_1} \lambda_4 \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

2. Meminimalkan H terhadap $u(t)$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

- Kontrol u_1

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$

$$c_1 u_1 + \lambda_2 = 0$$

Sehingga didapat kontrol optimal u_1 yaitu:

$$u_1^* = -\frac{\lambda_2}{c_1}$$

$$u_1^* = \frac{1}{c_1}(-\lambda_2)$$

- Kontrol u_2

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$$

$$c_2 u_2 + \frac{\lambda_4}{x_1} = 0$$

Sehingga didapat kontrol optimal u_2 yaitu:

$$u_2^* = -\frac{\lambda_4}{c_2 x_1}$$

$$u_2^* = \frac{1}{c_2 x_1}(-\lambda_4)$$

Karena nilai kontrolnya terbatas, dimana $0 \leq u_1 \leq 1$ dan

$0 \leq u_2 \leq 1$, maka:

$$u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_1}(-\lambda_2) \right) \right\} \quad (4.29)$$

$$u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_2 x_1}(-\lambda_4) \right) \right\} \quad (4.30)$$

Selanjutnya dilakukan uji turunan kedua untuk menunjukkan bahwa H mempunyai nilai minimum di $u(t)$.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = c_1 > 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} = c_2 > 0$$

Karena turunan kedua H terhadap semua kontrol bernilai positif, maka uji turunan kedua terpenuhi. Sehingga H mempunyai nilai minimum di u_1 dan u_2 .

3. Menentukan H^* yang optimal

Dengan cara mensubstitusikan u^* yang didapat pada langkah 2 ke dalam bentuk Hamiltonian.

$$\begin{aligned}
 H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) &= H(x^*(t), \lambda^*(t), t)H^* \\
 &= \frac{1}{2}c_1 \left(\frac{1}{c_1}(-\lambda_2^*) \right)^2 + \frac{1}{2}c_2 \left(\frac{1}{c_2x_1^*}(-\lambda_4^*) \right)^2 \\
 &\quad + \lambda_1^*x_2^* + \lambda_2^*x_1^*x_4^{2*} - \frac{\sigma^3\omega^2}{x_1^{2*}}\lambda_2^* \\
 &\quad + \lambda_2^* \left(\frac{1}{c_1}(-\lambda_2^*) \right) + \lambda_3^*x_4^* - \frac{2x_2^*x_4^*}{x_1^*}\lambda_4^* \\
 &\quad + \frac{1}{c_2x_1^{2*}}(-\lambda_4^{2*}) \\
 H^* &= \frac{\lambda_2^{2*}}{2c_1} + \frac{\lambda_4^{2*}}{2c_2x_1^{2*}} + x_2^*\lambda_1^* + x_1^*x_4^{2*}\lambda_2^* - \frac{\sigma^3\omega^2}{x_1^{2*}}\lambda_2^* - \frac{\lambda_2^{2*}}{c_1} + \\
 &\quad x_4^*\lambda_3^* - \frac{2x_2^*x_4^*}{x_1^*}\lambda_4^* - \frac{\lambda_4^{2*}}{c_2x_1^{2*}} \\
 H^* &= \frac{\lambda_2^{2*}}{2c_1} - \frac{\lambda_4^{2*}}{2c_2x_1^{2*}} + x_2^*\lambda_1^* + x_1^*x_4^{2*}\lambda_2^* - \frac{\sigma^3\omega^2}{x_1^{2*}}\lambda_2^* - \frac{\lambda_2^{2*}}{c_1} + \\
 &\quad x_4^*\lambda_3^* - \frac{2x_2^*x_4^*}{x_1^*}\lambda_4^* \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*

Penyelesaian persamaan *state* dan *costate* untuk memperoleh persamaan sistem yang optimal diberikan sebagai berikut:

a. Persamaan *state*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \right)_* \\ &= x_2^*\end{aligned}\quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \right)_* \\ &= x_1 x_4^2 - \frac{\sigma^3 \omega^2}{x_1^2} + u_1\end{aligned}\quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} \right)_* \\ &= x_4^*\end{aligned}\quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_4(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} \right)_* \\ &= -\frac{2x_2 x_4 + u_2}{x_1}\end{aligned}\quad (4.35)$$

b. Persamaan *costate*

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)_* \\ &= -\left(x_4^2 \lambda_2 + \frac{2\sigma^3 \omega^2}{x_1^3} \lambda_2 + \frac{2x_2 x_4 - u_2}{x_1^2} \lambda_4 \right)\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_2(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)_* \\ &= -\left(\lambda_1 - \frac{2x_4}{x_1} \lambda_4 \right)\end{aligned}\quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_3(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} \right)_* \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_4(t) &= - \left(\frac{\partial H}{\partial x_4} \right)_* \\
&= -(2x_1 x_4 \lambda_2 + \lambda_3 - \frac{2x_2}{x_1} \lambda_4)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

4.4 Solusi Numerik

Persamaan *state* dan *costate* yang diperoleh merupakan persamaan nonlinier sehingga sulit untuk diselesaikan secara analitik, sehingga dalam Tugas Akhir ini persamaan *state* dan *costate* akan diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik ini dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat karena galat yang dihasilkan kecil. Metode Runge-Kutta banyak digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan h , dimana h adalah langkah waktu (*step size*).

Persamaan *state* dan *costate* yang digunakan dalam metode ini adalah persamaan *state* (4.32) sampai (4.35) dan persamaan *costate* (4.36) sampai (4.37). Karena pada *state* diketahui nilai awal maka untuk menyelesaikan persamaan *state* digunakan metode *forward sweep*. Sedangkan untuk persamaan *costate* digunakan metode *backward sweep* Karena nilai akhir *costate* diketahui berdasarkan kondisi *transversality*, Sehingga metode yang digunakan adalah *forward-backward sweep* dengan solusi numerik yang digunakan adalah Runge-Kutta orde empat.

Langkah 1:

Interval waktu $t = [0, t_f]$ dibagi sebanyak n subinterval. Sehingga persamaan *state* dan *costate* dapat ditulis sebagai berikut:

- *State*

$$\vec{x}_1 = (x_{1_1}, \dots, x_{1_{n+1}})$$

$$\vec{x}_2 = (x_{2_1}, \dots, x_{2_{n+1}})$$

$$\vec{x}_3 = (x_{3_1}, \dots, x_{3_{n+1}})$$

$$\vec{x}_4 = (x_{4_1}, \dots, x_{4_{n+1}})$$

- *Costate*

$$\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1_1}, \dots, \lambda_{1_{n+1}})$$

$$\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{2_1}, \dots, \lambda_{2_{n+1}})$$

$$\vec{\lambda}_3 = (\lambda_{3_1}, \dots, \lambda_{3_{n+1}})$$

$$\vec{\lambda}_4 = (\lambda_{4_1}, \dots, \lambda_{4_{n+1}})$$

Artinya terdapat $n + 1$ titik disepanjang waktu t , sehingga diperoleh selisih antara setiap titiknya $h = (t_f - t_0)/n$.

Langkah 2:

Memberikan inisialisasi nilai awal $u_1, u_2, x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 dalam bentuk vektor nol sebanyak n .

Langkah 3:

Menggunakan nilai awal $u_1(0) = u_{1_0}, u_2(0) = u_{2_0}$,

$$x_1(0) = x_{1_0}, x_2(0) = x_{2_0}, x_3(0) = x_{3_0}, x_4(0) = x_{4_0}.$$

Langkah 4:

Menghitung nilai $u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_1} (-\lambda_2) \right) \right\}$ dan

$$u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_2 x_1} (-\lambda_4) \right) \right\}.$$

Langkah 5:

Menyelesaikan persamaan *state* secara *forward sweep*. Integrasi numerik dari persamaan *state* (4.32) sampai (4.35) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{1 \ n+1} = x_{1 \ n} + \frac{1}{6} (k_{1, x_1} + 2k_{2, x_1} + 2k_{3, x_1} + k_{4, x_1})$$

$$x_{2 \ n+1} = x_{2 \ n} + \frac{1}{6} (k_{1, x_2} + 2k_{2, x_2} + 2k_{3, x_2} + k_{4, x_2})$$

$$x_{3\ n+1} = x_{3\ n} + \frac{1}{6}(k_{1, x_3} + 2k_{2, x_3} + 2k_{3, x_3} + k_{4, x_3})$$

$$x_{4\ n+1} = x_{4\ n} + \frac{1}{6}(k_{1, x_4} + 2k_{2, x_4} + 2k_{3, x_4} + k_{4, x_4})$$

dengan,

$$k_{1, x_1} = hf(x_{1_n}, x_{2_n}, x_{3_n}, x_{4_n}, u_{1_n}, u_{2_n})$$

$$k_{1, x_2} = hf(x_{1_n}, x_{2_n}, x_{3_n}, x_{4_n}, u_{1_n}, u_{2_n})$$

$$k_{1, x_3} = hf(x_{1_n}, x_{2_n}, x_{3_n}, x_{4_n}, u_{1_n}, u_{2_n})$$

$$k_{1, x_4} = hf(x_{1_n}, x_{2_n}, x_{3_n}, x_{4_n}, u_{1_n}, u_{2_n})$$

$$k_{2, x_1} = hf\left(x_{1_n} + \frac{k_{1, x_1}}{2}, x_{2_n} + \frac{k_{1, x_2}}{2}, x_{3_n} + \frac{k_{1, x_3}}{2}, x_{4_n} + \frac{k_{1, x_4}}{2}, u_{1_n}, u_{2_n}\right)$$

$$k_{2, x_2} = hf\left(x_{1_n} + \frac{k_{1, x_1}}{2}, x_{2_n} + \frac{k_{1, x_2}}{2}, x_{3_n} + \frac{k_{1, x_3}}{2}, x_{4_n} + \frac{k_{1, x_4}}{2}, u_{1_n}, u_{2_n}\right)$$

$$k_{2, x_3} = hf\left(x_{1_n} + \frac{k_{1, x_1}}{2}, x_{2_n} + \frac{k_{1, x_2}}{2}, x_{3_n} + \frac{k_{1, x_3}}{2}, x_{4_n} + \frac{k_{1, x_4}}{2}, u_{1_n}, u_{2_n}\right)$$

$$k_{2, x_4} = hf\left(x_{1_n} + \frac{k_{1, x_1}}{2}, x_{2_n} + \frac{k_{1, x_2}}{2}, x_{3_n} + \frac{k_{1, x_3}}{2}, x_{4_n} + \frac{k_{1, x_4}}{2}, u_{1_n}, u_{2_n}\right)$$

$$k_{3,x_1} = hf \left(x_{1n} + \frac{k_{2,x_1}}{2}, x_{2n} + \frac{k_{2,x_2}}{2}, x_{3n} + \frac{k_{2,x_3}}{2}, x_{4n} + \frac{k_{2,x_4}}{2}, u_{1n}, u_{2n} \right)$$

$$k_{3,x_2} = hf \left(x_{1n} + \frac{k_{2,x_1}}{2}, x_{2n} + \frac{k_{2,x_2}}{2}, x_{3n} + \frac{k_{2,x_3}}{2}, x_{4n} + \frac{k_{2,x_4}}{2}, u_{1n}, u_{2n} \right)$$

$$k_{3,x_3} = hf \left(x_{1n} + \frac{k_{2,x_1}}{2}, x_{2n} + \frac{k_{2,x_2}}{2}, x_{3n} + \frac{k_{2,x_3}}{2}, x_{4n} + \frac{k_{2,x_4}}{2}, u_{1n}, u_{2n} \right)$$

$$k_{3,x_4} = hf \left(x_{1n} + \frac{k_{2,x_1}}{2}, x_{2n} + \frac{k_{2,x_2}}{2}, x_{3n} + \frac{k_{2,x_3}}{2}, x_{4n} + \frac{k_{2,x_4}}{2}, u_{1n}, u_{2n} \right)$$

$$k_{4,x_1} = hf(x_{1n} + k_{3,x_1}, x_{2n} + k_{3,x_2}, x_{3n} + k_{3,x_3}, x_{4n} + k_{3,x_4}, u_{1n}, u_{2n})$$

$$k_{4,x_2} = hf(x_{1n} + k_{3,x_1}, x_{2n} + k_{3,x_2}, x_{3n} + k_{3,x_3}, x_{4n} + k_{3,x_4}, u_{1n}, u_{2n})$$

$$k_{4,x_3} = hf(x_{1n} + k_{3,x_1}, x_{2n} + k_{3,x_2}, x_{3n} + k_{3,x_3}, x_{4n} + k_{3,x_4}, u_{1n}, u_{2n})$$

$$k_{4,x_4} = hf(x_{1n} + k_{3,x_1}, x_{2n} + k_{3,x_2}, x_{3n} + k_{3,x_3}, x_{4n} + k_{3,x_4}, u_{1n}, u_{2n})$$

Langkah 6:

Menyelesaikan persamaan *costate* secara *backward sweep*. Integrasi numerik dari persamaan *costate* (4.36) sampai (4.39) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1\ n-1} &= \lambda_{1\ n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 2k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}) \\
\lambda_{2\ n-1} &= \lambda_{2\ n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 2k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2}) \\
\lambda_{3\ n-1} &= \lambda_{1\ n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_3} + 2k_{2,\lambda_3} + 2k_{3,\lambda_3} + k_{4,\lambda_3}) \\
\lambda_{4\ n-1} &= \lambda_{4\ n} - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_4} + 2k_{2,\lambda_4} + 2k_{3,\lambda_4} + k_{4,\lambda_4})
\end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned}
k_{1,\lambda_1} &= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}) \\
k_{1,\lambda_2} &= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}) \\
k_{1,\lambda_3} &= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}) \\
k_{1,\lambda_4} &= hf(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \lambda_{4n}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,\lambda_1} &= hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_{1,\lambda_4}}{2}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}\right) \\
k_{2,\lambda_2} &= hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_{1,\lambda_4}}{2}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}\right) \\
k_{2,\lambda_3} &= hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_{1,\lambda_4}}{2}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}\right)
\end{aligned}$$

$$k_{2,\lambda_4} = hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_{1,\lambda_4}}{2}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}\right)$$

$$k_{3,\lambda_1} = hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_{2,\lambda_4}}{2}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}\right)$$

$$k_{3,\lambda_2} = hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_{2,\lambda_4}}{2}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}\right)$$

$$k_{3,\lambda_3} = hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_{2,\lambda_4}}{2}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}\right)$$

$$k_{3,\lambda_4} = hf\left(\lambda_{1n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3n} - \frac{k_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4n} - \frac{k_{2,\lambda_4}}{2}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n}\right)$$

$$k_{4,\lambda_1} = hf(\lambda_{1n} - k_{3,\lambda_1}, \lambda_{2n} - k_{3,\lambda_2}, \lambda_{3n} - k_{3,\lambda_3}, \lambda_{4n} - k_{3,\lambda_4}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n})$$

$$k_{4,\lambda_2} = hf(\lambda_{1n} - k_{3,\lambda_1}, \lambda_{2n} - k_{3,\lambda_2}, \lambda_{3n} - k_{3,\lambda_3}, \lambda_{4n} - k_{3,\lambda_4}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n})$$

$$k_{4,\lambda_3} = hf(\lambda_{1n} - k_{3,\lambda_1}, \lambda_{2n} - k_{3,\lambda_2}, \lambda_{3n} - k_{3,\lambda_3}, \lambda_{4n} - k_{3,\lambda_4}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n})$$

$$k_{4, \lambda_4} = hf(\lambda_{1n} - k_{3, \lambda_1}, \lambda_{2n} - k_{3, \lambda_2}, \lambda_{3n} - k_{3, \lambda_3}, \lambda_{4n} - k_{3, \lambda_4}, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, u_{1n}, u_{2n})$$

Langkah 7:

Memperbarui nilai u_1 dan u_2 dengan mensubstitusikan nilai $x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 yang baru ke dalam karakterisasi kontrol optimal. Dalam hal ini nilai u_1 dan u_2 diberikan pada persamaan (4.29) dan (4.30).

4.5 Analisis Hasil Simulasi

Pada subbab ini akan dilakukan simulasi pada model persamaan sistem gerak satelit (2.11) yang sudah ditransformasi pada subbab 4.1. Simulasi yang dilakukan meliputi simulasi sistem awal yaitu sebelum diberi kontrol, simulasi gangguan terhadap jarak antara bumi dan satelit dari posisi geostasionernya sebelum dan sesudah diberi kontrol, gangguan kecepatan radial satelit dari kecepatan radial geostasionernya sebelum dan sesudah diberi kontrol, gangguan pada sudut yang dibentuk dari pergerakan satelit dari posisi geostasionernya sebelum dan sesudah diberikan kontrol, serta gangguan yang terjadi pada kecepatan tangensial geostasionernya sebelum dan sesudah diberikan kontrol, dengan menggunakan parameter:

Tabel 4.1 Nilai Parameter

Parameter	Nilai
σ	1
ω	1

Simulasi dengan metode numerik Runge-Kutta dengan nilai awal yang diberikan adalah sebagai berikut[6]:

$$x_1(0) = 1 \text{ km}$$

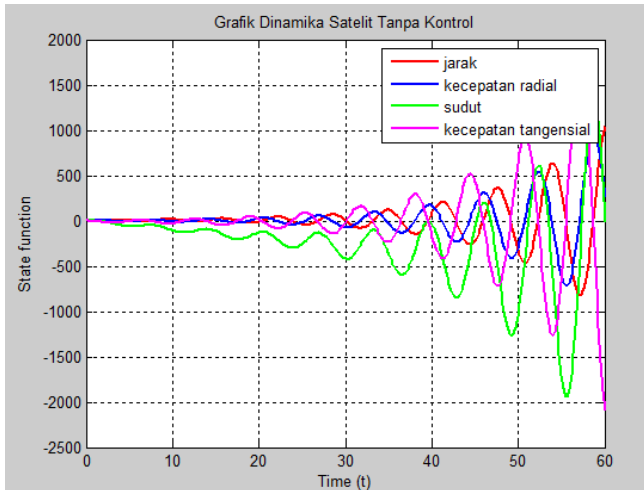
$$x_2(0) = 1 \text{ km/s}$$

$$x_3(0) = 1 \text{ derajat}$$

$$x_4(t) = 1 \text{ derajat/s}$$

dengan x_1 menyatakan besar pergeseran jarak antara bumi dan satelit dari posisi geostasionernya, x_2 menyatakan besar perubahan kecepatan radial satelit dari kecepatan radial geostasionernya, x_3 menyatakan besar pergeseran sudut yang dibentuk dari pergerakan satelit dari posisi geostasionernya, x_4 menyatakan besar perubahan kecepatan tangensial dari kecepatan tangensial geostasionernya.

Simulasi dilakukan dengan $t_0 = 0$ dan $t_f = 60$ s. Simulasi pertama yang dilakukan adalah ketika sistem awal sebelum pemberian kontrol atau diasumsikan $u_1 = u_2 = 0$. Artinya tidak ada kontrol terhadap pergeseran atau perubahan yang terjadi pada sistem gerak satelit karena pengaruh perturbasi orbital.

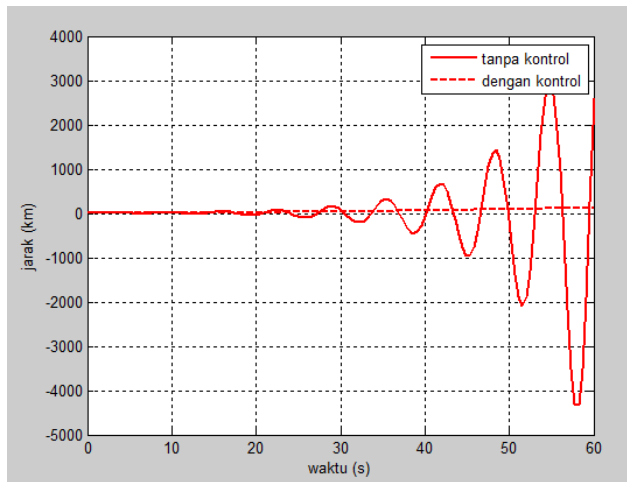


Gambar 4.1 Grafik x_1, x_2, x_3 , dan x_4 tanpa kontrol

Pada gambar 4.1 terlihat bahwa sistem gerak satelit sebelum diberikan kontrol maka untuk t menuju tak hingga keadaan sistem gerak satelit yaitu x_1, x_2, x_3 , dan x_4 mengalami fluktuasi naik turun serta sistem tidak dapat kembali pada keadaan geostasionernya.

Selanjutnya dari kondisi awal tersebut dilakukan simulasi dengan pemberian kontrol u_1 dan u_2 dengan bobot yang diberikan adalah 10 dan 50. Berikut jika diberikan kondisi bobot kontrol u_1 lebih besar dari u_2 , bobot dari kontrol u_1 lebih kecil dari u_2 , dan bobot dari kontrol u_1 sama dengan u_2 .

1. Bobot dari kontrol u_1 lebih besar dari u_2 ($c_1 > c_2$)
Kondisi ini diberikan dengan pemberian bobot $c_1 = 50$ dan $c_2 = 10$ menghasilkan nilai $J = 0.0452$.

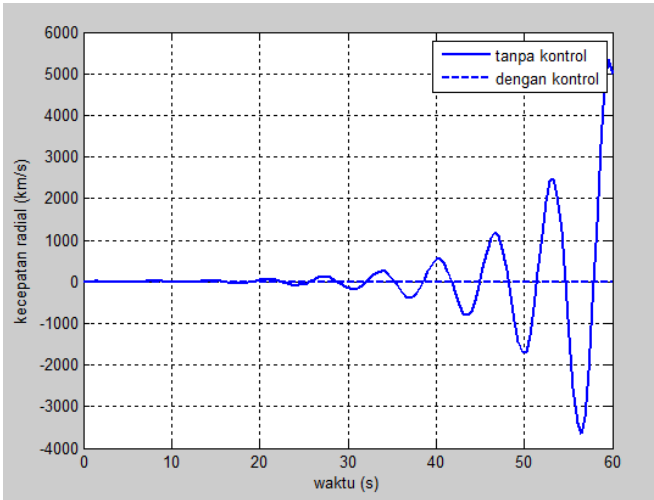


Gambar 4.2 Jarak (x_1) dengan bobot $c_1 > c_2$

Dari gambar 4.2 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada pergeseran jarak satelit dengan bumi pada posisi geostasionernya sebesar 1 km dan sebelum diberikan kontrol, grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke posisi geostasionernya.

Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang diberikan pada sistem dapat mengembalikan jarak antara satelit dan bumi pada posisi

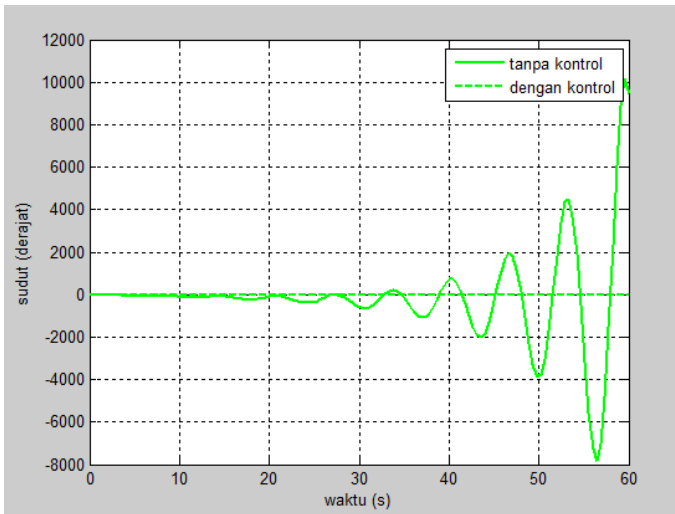
geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.



Gambar 4.3 Kecepatan (x_2) dengan bobot $c_1 > c_2$

Dari gambar 4.3 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada perubahan kecepatan radial satelit dengan kecepatan geostasionernya sebesar 1 km/s dan sebelum diberikan kontrol, grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

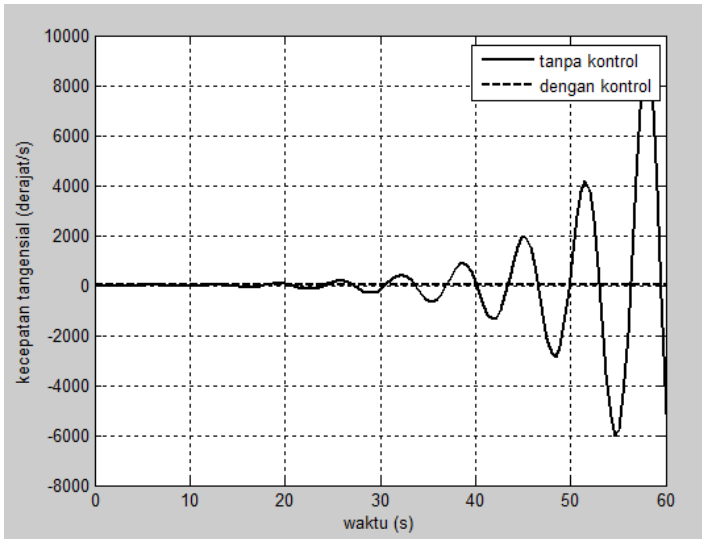
Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang diberikan pada sistem dapat menstabilkan kecepatannya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol, kecepatan satelit akan stabil pada keadaan geostasionernya.



Gambar 4.4 Sudut (x_3) dengan bobot $c_1 > c_2$

Dari gambar 4.4 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada pergeseran sudut satelit dengan bumi pada posisi geostasionernya sebesar 1 *derajat* menyebabkan grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan semakin menjauhi posisi geostasionernya serta tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang telah diberikan pada sistem dapat mengembalikan ke keadaan geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.

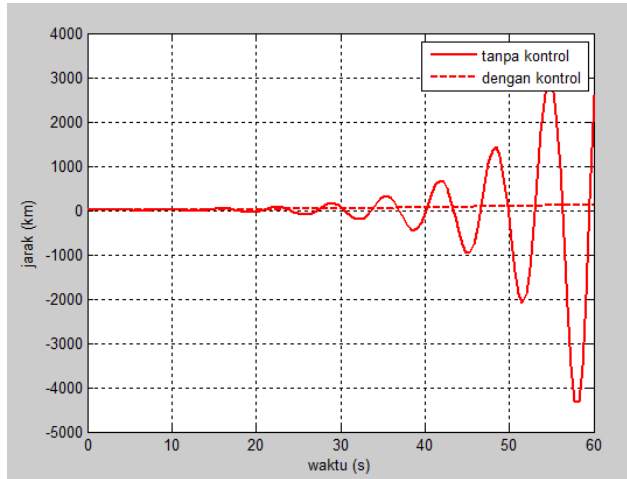


Gambar 4.5 Kecepatan sudut (x_4) dengan bobot $c_1 > c_2$

Dari gambar 4.5 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada perubahan kecepatan tangensial satelit dengan kecepatan geostasionernya sebesar 1 *derajat/s* menyebabkan grafik dari sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang telah diberikan pada sistem dapat mengembalikan ke keadaan geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.

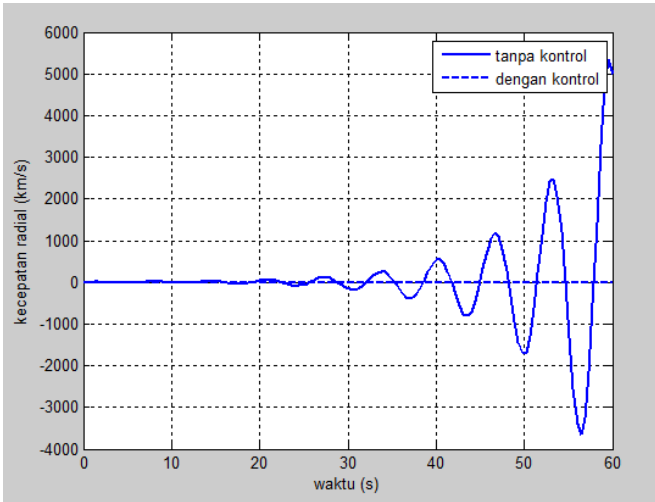
2. Bobot dari kontrol u_1 lebih kecil dari u_2 ($c_1 < c_2$)
 Kondisi ini diberikan dengan pemberian bobot
 $c_1 = 10$ dan $c_2 = 50$ menghasilkan nilai $J = 0.0452$.



Gambar 4.6 Jarak (x_1) dengan bobot $c_1 < c_2$

Dari gambar 4.6 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada pergeseran jarak satelit dengan bumi pada posisi geostasionernya sebesar 1 km dan sebelum diberikan kontrol, grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke posisi geostasionernya.

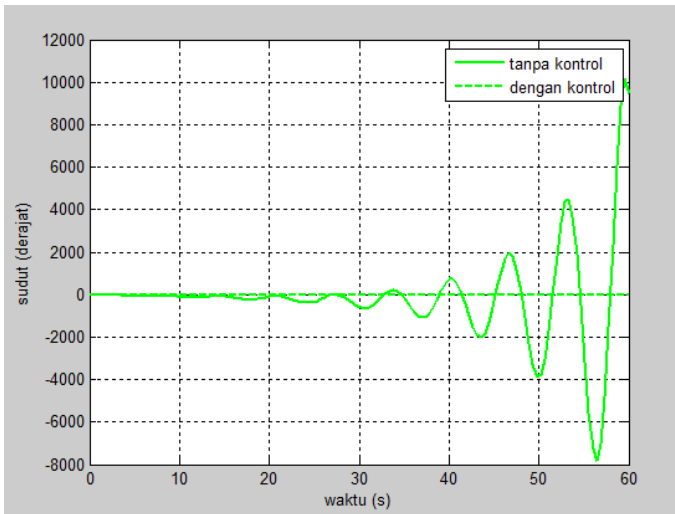
Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang diberikan pada sistem dapat mengembalikan jarak antara satelit dan bumi pada posisi geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.



Gambar 4.7 Kecepatan (x_2) dengan bobot $c_1 < c_2$

Dari gambar 4.7 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada perubahan kecepatan radial satelit dengan kecepatan geostasionernya sebesar 1 km/s dan sebelum diberikan kontrol, grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

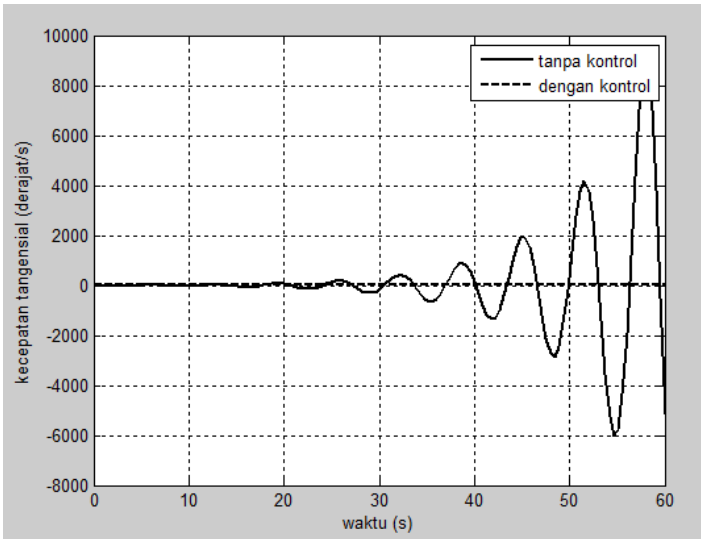
Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang diberikan pada sistem dapat menstabilkan kecepatannya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol, kecepatan satelit akan stabil pada keadaan geostasionernya.



Gambar 4.8 Sudut (x_3) dengan bobot $c_1 < c_2$

Dari gambar 4.8 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada pergeseran sudut satelit dengan bumi pada posisi geostasionernya sebesar 1 *derajat* menyebabkan grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan semakin menjauhi posisi geostasionernya serta tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang telah diberikan pada sistem dapat mengembalikan ke keadaan geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.

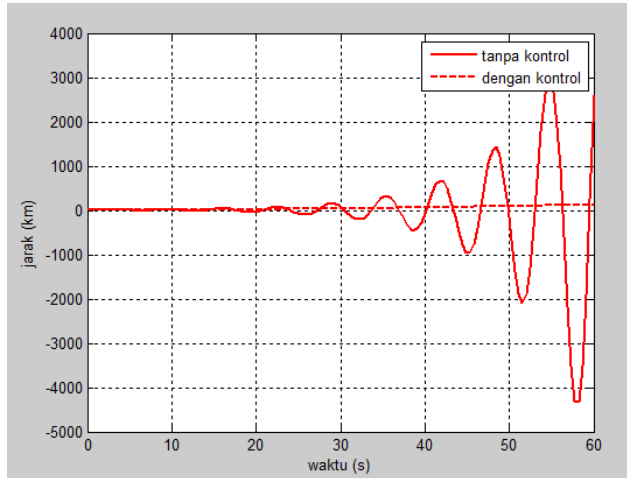


Gambar 4.9 Kecepatan sudut (x_4) dengan bobot $c_1 < c_2$

Dari gambar 4.9 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada perubahan kecepatan tangensial satelit dengan kecepatan geostasionernya sebesar 1 *derajat/s* menyebabkan grafik dari sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang telah diberikan pada sistem dapat mengembalikan ke keadaan geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.

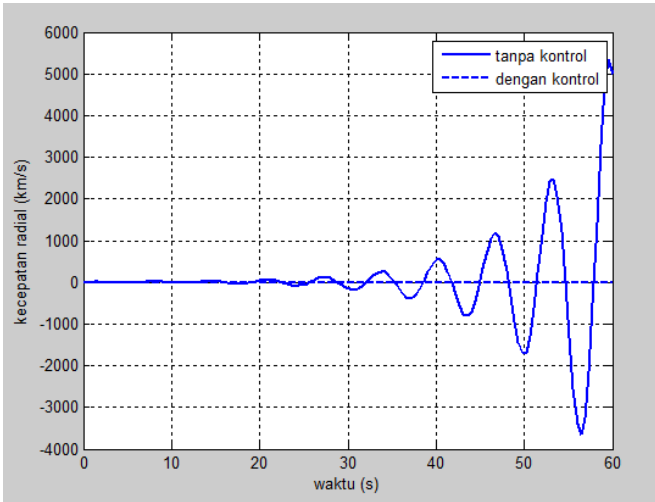
3. Bobot dari kontrol u_1 sama dengan u_2 ($c_1 = c_2$)
 Kondisi ini diberikan dengan pemberian bobot
 $c_1 = c_2 = 10$ menghasilkan nilai $J = 0.0151$ dan
 $c_1 = c_2 = 50$ menghasilkan nilai $J = 0.0753$.



Gambar 4.10 Jarak (x_1) dengan bobot $c_1 = c_2$

Dari gambar 4.10 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada pergeseran jarak satelit dengan bumi pada posisi geostasionernya sebesar 1 km dan sebelum diberikan kontrol, grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke posisi geostasionernya.

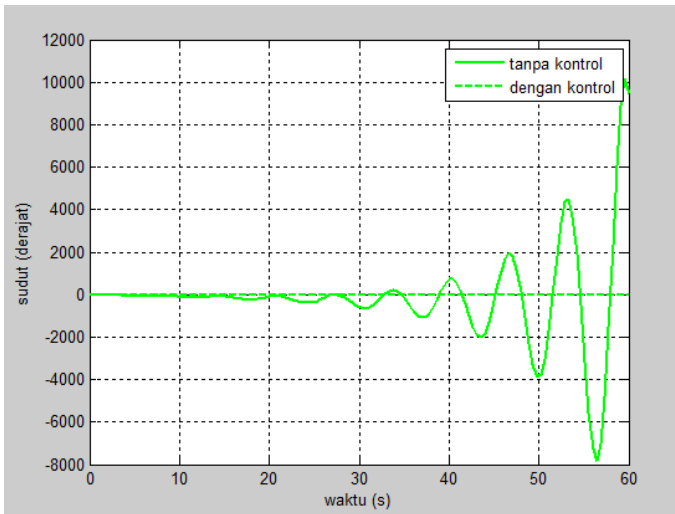
Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan control u_1 dan u_2 maka kontrol yang diberikan pada sistem dapat mengembalikan jarak antara satelit dan bumi pada posisi geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.



Gambar 4.11 Kecepatan (x_2) dengan bobot $c_1 = c_2$

Dari gambar 4.11 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada perubahan kecepatan radial satelit dengan kecepatan geostasionernya sebesar 1 km/s dan sebelum diberikan kontrol, grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

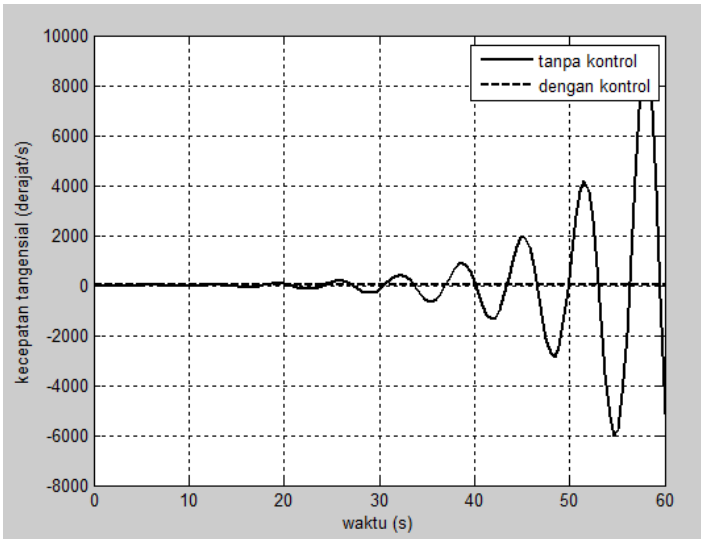
Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang diberikan pada sistem dapat menstabilkan kecepatannya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol, kecepatan satelit akan stabil pada keadaan geostasionernya.



Gambar 4.12 Sudut (x_3) dengan bobot $c_1 = c_2$

Dari gambar 4.12 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada pergeseran sudut satelit dengan bumi pada posisi geostasionernya sebesar 1 *derajat* menyebabkan grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan semakin menjauhi posisi geostasionernya serta tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang telah diberikan pada sistem dapat mengembalikan ke keadaan geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.



Gambar 4.13 Kecepatan sudut (x_4) dengan bobot $c_1 = c_2$

Dari gambar 4.5 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada perubahan kecepatan tangensial satelit dengan kecepatan geostasionernya sebesar 1 *derajat/s* menyebabkan grafik dari sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke keadaan geostasionernya.

Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang telah diberikan pada sistem dapat mengembalikan ke keadaan geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.

Sehingga dari simulasi kondisi pertama sampai dengan simulasi kondisi ketiga dapat dituliskan nilai J pada tabel berikut:

Tabel 4.2 Nilai fungsi tujuan (J)

Bobot c_1	Bobot c_2	J
50	10	0.0452
10	50	0.0452
10	10	0.0151
50	50	0.0753

Dapat ditarik kesimpulan bahwa fungsi tujuan J minimal ketika diberikan bobot yang sama yaitu $c_1 = c_2 = 10$ dengan hasil $J = 0.0151$ dan dengan nilai kontrol $u_1 = u_2 = 0.005$.

BAB V

PENUTUP

Pada bab ini, berisi kesimpulan dari penelitian Tugas Akhir dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis hasil simulasi pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Sistem gerak satelit adalah sistem yang tidak stabil karena semua nilai eigen bagian real semua bernilai nol. Sistem juga bersifat terkontrol dan teramati. Sehingga kontrol optimal dengan Prinsip Minimum Potryagin dapat diterapkan pada sistem gerak satelit.
2. Dari hasil simulasi sistem awal dari model gerak satelit saat terkena pengaruh dari luar atau gangguan, grafik mengalami fluktuasi naik turun artinya sistem gerak satelit rentan terhadap gangguan dan tidak bisa kembali ke posisi sebelumnya.
3. Hasil simulasi dengan pemberian kontrol yaitu dapat mengembalikan posisi satelit ke posisi geostasionernya dengan waktu 60s secara optimal dengan bobot $c_1 = c_2 = 10$ dengan besar energi optimal $J = 0.0151$.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan penerapan model satelit yang lain atau dapat menggunakan metode kontrol optimal ataupun penyelesaian numerik yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Luknanto, Djoko. (2003). *Model Matematika*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- [2] *Satelit*: Wikipedia. Diambil dari: <https://id.m.wikipedia.org/wiki/Satelit>.
- [3] Muharram, Riza M. *Hari Ini: Satelit Pertama Buatan Manusia Meluncur ke Luar Angkasa*: Info Astronomi. Diambil dari: <http://www.infoastronomy.org/2015/10/hari-ini-1957-satelit-sputnik-1-meluncur.html>.
- [4] *Melihat Sampah yang Menumpuk di Orbit Bumi selama 60 Tahun*: National Geographic Indonesia. Diambil dari: <http://nationalgeographic.co.id/berita/2015/12/melihat-sampah-yang-menumpuk-di-orbit-bumi-selama-60-tahun>.
- [5] Lestari, M. *Satelit Geostasioner*: Academia. Diambil dari: www.academia.edu/16540093/SATELIT_GEOSTASIONER
- [6] Suprpto, S., Pangaribuan, P., Jonathan, G. (2009) *Analisa Kebutuhan Bahan Bakar Satelit Palapa C2 Untuk Keperluan Station Keeping*. Teknik Telekomunikasi Fakultas Teknik Elektro. Bandung: Universitas Telkom.
- [7] Olsder, G. J dan J. W. van der Woude. 2004. *Mathematical System Theory*. Belanda: Delft University of Technology.
- [8] Purwanti, Swesti Y., Supriatna, A.K., Anggriani, N. (2009). *Aplikasi Teori Kontrol dalam Linearisasi Model Persamaan Gerak Satelit*. Bandung: Universitas Padjajaran.
- [9] Arrosyid, R. (2014). *Pengendalian Gerak Satelit dengan Menggunakan Metode Linier Quadratic Regulator (LQR)*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- [10] Wanti, Putri P. (2011). *Optimasi Energi Lokal pada Kendali Kereta Api dengan Lintasan Menanjak*. Jurusan Matematika FMIPA. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [11] Khoir, M. (2014). *Waktu Optimal dalam Diversifikasi Produksi Energi Terbarukan dan Tidak Terbarukan dengan Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin*. Jurusan

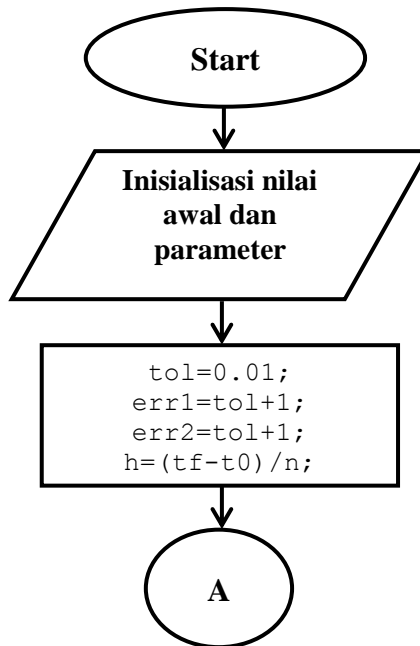
Matematika FMIPA. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

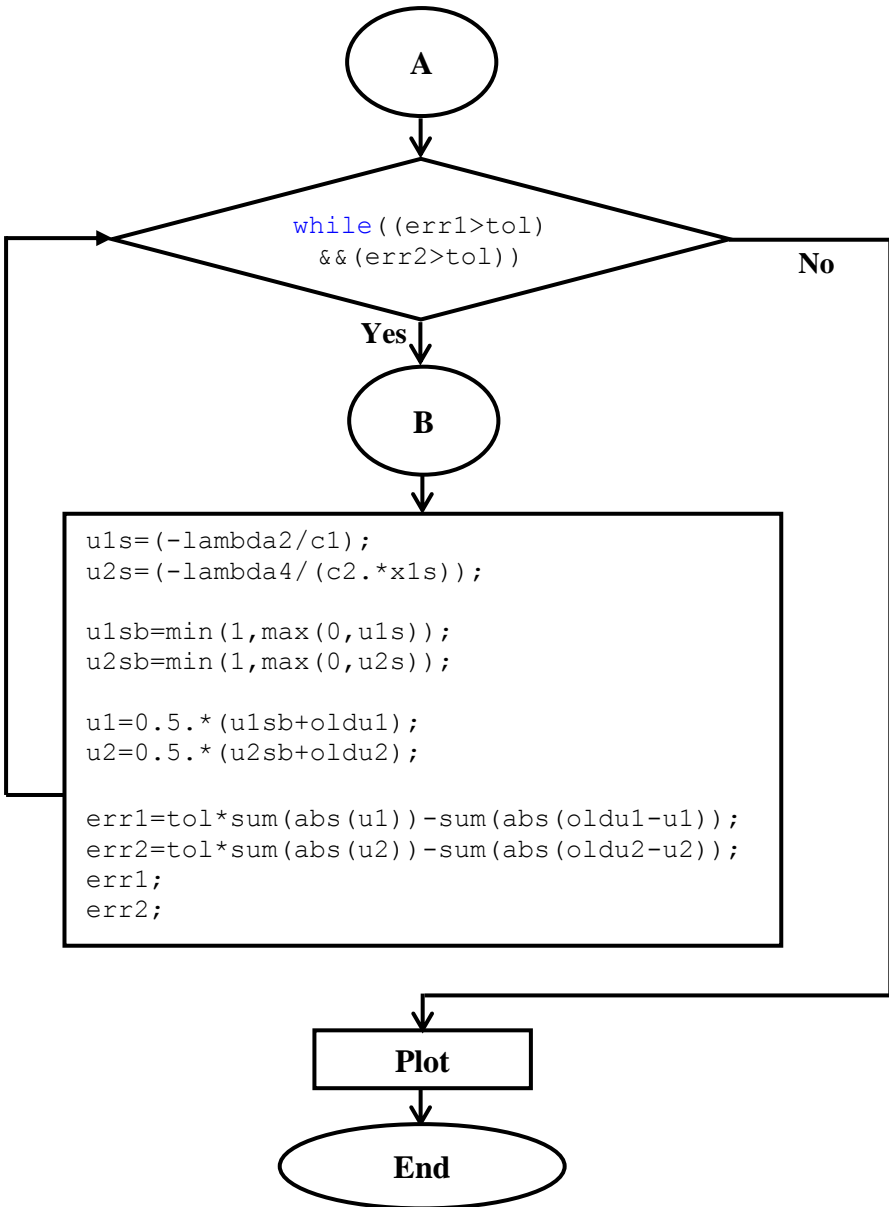
- [12] Priyambodo, A. (2006). *Rancang Bangun Simulator Orbit Satelit Non-Geostasioner Landsat 7*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [13] Kusmaryanto, S. (2013). *Orbit Satelit*. Diambil dari: <http://sigitkus.lecture.ub.ac.id/?p=1691>.
- [14] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. USA: Departement of Mathematics Northern Arizona University.
- [15] Subiono. (2013). *Sistem Linier dan Kontrol Optimal*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [16] Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. USA: CRC Press LLC.

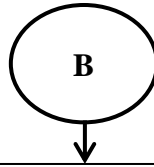
LAMPIRAN A
DAFTAR SATUAN

Parameter	Daftar Satuan
σ	km
ω	$derajat/s$
m	kg
M	kg
g	km^5/s^2
G	Nm/kg^2
F	$Newton$
a	km/s^2
r	km
\dot{r}	km/s
\ddot{r}	km/s^2
θ	$derajat$
$\dot{\theta}$	$derajat/s$
$\ddot{\theta}$	$derajat/s^2$
x_1	km
x_2	km/s
x_3	$derajat$
x_4	$derajat/s$
J	$Joule$

LAMPIRAN B
FLOWCHART SIMULASI







```

%system awal
for i=1:n
a1=h.*(x2(i));
b1=h.*(3.*(omega.^2).*x1(i)+2.*omega.*x4(i)+u1_0);
e1=h.*(x4(i));
d1=h.*(-2.*omega.*x2(i)+u2_0);
a2=h.*(x2(i)+h.*0.5.*b1);
b2=h.*(3.*(omega.^2).*x1(i)+h.*0.5.*a1)+2.*omega
    .*(x4(i)+h.*0.5.*d1)+u1_0);
e2=h.*(x4(i)+h.*0.5.*d1);
d2=h.*(-2.*omega.*(x2(i)+h.*0.5.*b1)+u2_0);
a3=h.*(x2(i)+h.*0.5.*b2);
b3=h.*(3.*(omega.^2).*x1(i)+h.*0.5.*a2)+2.*omega
    .*(x4(i)+h.*0.5.*d2)+u1_0);
e3=h.*(x4(i)+h.*0.5.*d2);
d3=h.*(-2.*omega.*(x2(i)+h.*0.5.*b2)+u2_0);
a4=h.*(x2(i)+h.*b3);
b4=h.*(3.*(omega.^2).*x1(i)+h.*a3)+2.*omega.*
    (x4(i)+h.*d3)+u1_0);
e4=h.*(x4(i)+h.*d3);
d4=h.*(-2.*omega.*(x2(i)+h.*b3)+u2_0);
a=(a1+2.*a2+2.*a3+a4)./6;
b=(b1+2.*b2+2.*b3+b4)./6;
e=(e1+2.*e2+2.*e3+e4)./6;
d=(d1+2.*d2+2.*d3+d4)./6;
x1(i+1)=x1(i)+a;
x2(i+1)=x2(i)+b;
x3(i+1)=x3(i)+e;
x4(i+1)=x4(i)+d;

end
  
```

```

%persamaan state
for i=1:n
k1_x1s=h.*(x2s(i));
k1_x2s=h.*(x1s(i).*(x4s(i).^2)-(((sigma.^3).*(
    (omega.^2))./(x1s(i).^2))+u1(i)));
k1_x3s=h.*(x4s(i));
k1_x4s=h.*((-2.*x2s(i).*x4s(i)+(u2(i)))./x1s(i));
k2_x1s=h.*(x2s(i)+0.5.*h.*k1_x2s);
k2_x2s=h.*((x1s(i)+0.5.*h.*k1_x1s).*((x4s(i)+
    0.5.*h.*k1_x4s).^2)-(((sigma.^3).*(
    (omega.^2))./((x1s(i)+0.5.*h.*k1_x1s).^2))+
    (0.5.*(u1(i)+u1(i+1)))));
k2_x3s=h.*(x4s(i)+0.5.*h.*k1_x4s);
k2_x4s=h.*((-2.*(x2s(i)+0.5.*h.*k1_x2s).*(
    (x4s(i)+0.5.*h.*k1_x4s)+(0.5.*(u2(i)+
    u2(i+1))))./(x1s(i)+0.5.*h.*k1_x1s));
k3_x1s=h.*(x2s(i)+0.5.*h.*k2_x2s);
k3_x2s=h.*((x1s(i)+0.5.*h.*k2_x1s).*((x4s(i)+
    0.5.*h.*k2_x4s).^2)-(((sigma.^3).*(
    (omega.^2))./((x1s(i)+0.5.*h.*k2_x1s).^2))+
    (0.5.*(u1(i)+u1(i+1)))));
k3_x3s=h.*(x4s(i)+0.5.*h.*k2_x4s);
k3_x4s=h.*((-2.*(x2s(i)+0.5.*h.*k2_x2s).*(
    (x4s(i)+0.5.*h.*k2_x4s)+(0.5.*(u2(i)+
    u2(i+1))))./(x1s(i)+0.5.*h.*k2_x1s));
k4_x1s=h.*(x2s(i)+h.*k3_x2s);
k4_x2s=h.*((x1s(i)+h.*k3_x1s).*((x4s(i)+
    h.*k3_x4s).^2)-(((sigma.^3).*(omega.^2))./
    ((x1s(i)+h.*k3_x1s).^2))+0.5.*(u1(i)+
    u1(i+1))));
k4_x3s=h.*(x4s(i)+h.*k3_x4s);
k4_x4s=h.*((-2.*(x2s(i)+h.*k3_x2s).*(
    (x4s(i)+h.*k3_x4s)+(0.5.*(u2(i)+u2(i+1))))./
    (x1s(i)+h.*k3_x1s));
x4s(i+1)=x4s(i)+kx4;
kx1=(k1_x1s+2.*k2_x1s+2.*k3_x1s+k4_x1s)./6;
kx2=(k1_x2s+2.*k2_x2s+2.*k3_x2s+k4_x2s)./6;
kx3=(k1_x3s+2.*k2_x3s+2.*k3_x3s+k4_x3s)./6;
kx4=(k1_x4s+2.*k2_x4s+2.*k3_x4s+k4_x4s)./6;

```

```

x1s(i+1)=x1s(i)+kx1;
x2s(i+1)=x2s(i)+kx2;
x3s(i+1)=x3s(i)+kx3;
x4s(i+1)=x4s(i)+kx4;

end

%persamaan costate
for i=1:n
    j=(n+1)-i;
    k1_l1=h.*(-(lambda2(j+1).*(x4s(j+1).^2)+2.*
        (sigma.^3).*(omega.^2).*lambda2(j+1)./
        (x1s(j+1).^3)+(2.*lambda4(j+1).*x2s(j+1).*
        x4s(j+1)-u2(j+1).*lambda4(j+1))./
        (x1s(j+1).^2)));
    k1_l2=h.*(-(lambda1(j+1)-2.*lambda4(j+1).*x4s(j+1)
        ./x1s(j+1)));
    k1_l3=h.*0;
    k1_l4=h.*(-(2.*lambda2(j+1).*x1s(j+1).*x4s(j+1)
        +lambda3(j+1)-2.*lambda4(j+1).*x2s(j+1)./
        x1s(j+1)));
    k2_l1=h.*(-(lambda2(j+1)-h.*0.5.*k1_l2).*
        ((0.5.*(x4s(j+1)+x4s(j))).^2)+2.*(sigma.^3)
        .*(omega.^2).*(lambda2(j+1)-h.*0.5.*k1_l2)./
        ((0.5.*(x1s(j+1)+x1s(j))).^3)+(2.*
        (lambda4(j+1)-h.*0.5.*k1_l4).*(0.5.*
        (x2s(j+1)+x2s(j))).*0.5.*(x4s(j+1)+x4s(j))-
        (0.5.*(u2(j+1)+u2(j))).*(lambda4(j+1)-
        h.*0.5.*k1_l4))./(0.5.*(x1s(j+1)+x1s(j))).^
        2)));
    k2_l2=h.*(-(lambda1(j+1)-h.*0.5.*k1_l1)-
        2.*(lambda4(j+1)-h.*0.5.*k1_l4).*
        (0.5.*(x4s(j+1)+x4s(j)))./(0.5.*(x1s(j+1)+
        x1s(j)))));
    k2_l3=h.*0;

```

```

k2_l4=h.*(-(2.*(lambda2(j+1)-h.*0.5.*k1_l2).*(
    (0.5.*(x1s(j+1)+x1s(j))).*(0.5.*(x4s(j+1)+
    x4s(j)))+(lambda3(j+1)-h.*0.5.*k1_l3)-2.*
    (lambda4(j+1)-h.*0.5.*k1_l4).*(0.5.*
    (x2s(j+1)+x2s(j)))./(0.5.*(x1s(j+1)+
    x1s(j)))));
k3_l1=h.*(-(lambda2(j+1)-h.*0.5.*k2_l2).*(
    ((0.5.*(x4s(j+1)+x4s(j))).^2)+2.*(sigma.^3)
    .*(omega.^2).*(lambda2(j+1)-h.*0.5.*k2_l2)./(
    ((0.5.*(x1s(j+1)+x1s(j))).^3)+(2.*
    (lambda4(j+1)-h.*0.5.*k2_l4).*(0.5.*
    (x2s(j+1)+x2s(j))).*(0.5.*(x4s(j+1)+x4s(j))-
    (0.5.*(u2(j+1)+u2(j))).*(lambda4(j+1)-
    h.*0.5.*k2_l4)))./(0.5.*(x1s(j+1)+
    x1s(j))).^2)));
k3_l2=h.*(-(lambda1(j+1)-h.*0.5.*k2_l1)-2.*
    (lambda4(j+1)-h.*0.5.*k2_l4).*(
    (0.5.*(x4s(j+1)+x4s(j)))./(0.5.*(x1s(j+1)+
    x1s(j)))));
k3_l3=h.*0;
k3_l4=h.*(-(2.*(lambda2(j+1)-h.*0.5.*k2_l2).*(
    (0.5.*(x1s(j+1)+x1s(j))).*(0.5.*(x4s(j+1)+
    x4s(j)))+(lambda3(j+1)-h.*0.5.*k2_l3)-
    2.*(lambda4(j+1)-h.*0.5.*k2_l4).*(
    (0.5.*(x2s(j+1)+x2s(j)))./(0.5.*(x1s(j+1)+
    x1s(j)))));
k4_l1=h.*(-(lambda2(j+1)-h.*k3_l2).*((0.5.*
    (x4s(j+1)+x4s(j))).^2)+2.*(sigma.^3).*(
    omega.^2).*(lambda2(j+1)-h.*k3_l2)./((0.5.*
    (x1s(j+1)+x1s(j))).^3)+(2.*(lambda4(j+1)-
    h.*k3_l4).*(0.5.*(x2s(j+1)+x2s(j))).*(0.5.*
    (x4s(j+1)+x4s(j)))-(0.5.*(u2(j+1)+u2(j))).*(
    (lambda4(j+1)-h.*k3_l4)))./(0.5.*(x1s(j+1)
    +x1s(j))).^2)));
k4_l2=h.*(-(lambda1(j+1)-h.*k3_l1)-2.*
    (lambda4(j+1)-h.*k3_l4).*(0.5.*(x4s(j+1)+
    x4s(j)))./(0.5.*(x1s(j+1)+x1s(j)))));
k4_l3=h.*0;

```



```

k4_l4=h.*(-(2.*(lambda2(j+1)-h.*k3_l2).*(
    (0.5.*(x1s(j+1)+x1s(j))).*(0.5.*(x4s(j+1)+
    x4s(j)))+(lambda3(j+1)-h.*k3_l3)-2.*
    (lambda4(j+1)-h.*k3_l4).*(0.5.*(x2s(j+1)
    +x2s(j)))./(0.5.*(x1s(j+1)+x1s(j)))));

k11=(k1_l1+2.*k2_l1+2.*k3_l1+k4_l1)./6;
k12=(k1_l2+2.*k2_l2+2.*k3_l2+k4_l2)./6;
k13=(k1_l3+2.*k2_l3+2.*k3_l3+k4_l3)./6;
k14=(k1_l4+2.*k2_l4+2.*k3_l4+k4_l4)./6;

lambda1(j)=lambda1(j+1)-k11;
lambda2(j)=lambda2(j+1)-k12;
lambda3(j)=lambda3(j+1)-k13;
lambda4(j)=lambda4(j+1)-k14;

end

```


BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Putri Saraswati dengan nama panggilan Putri. Lahir di Tangerang, 18 Maret 1996 dan tinggal di Kediri sejak tahun 1998. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Jenjang pendidikan formal yang penulis tempuh yaitu SDN Bawang 1 (2002-2008), SMPN 1 Kediri (2008-2011), *Acceleration Class* di SMAN 3 Kediri (2011-2013). Setelah lulus SMA penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 Departemen Matematika ITS pada tahun 2013-2017 melalui jalur SBMPTN dengan NRP 1213100063. Di Departemen Matematika ITS, penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di Kegiatan Mahasiswa ITS, yaitu sebagai staff Departemen Sosial Masyarakat di BEM FMIPA ITS (2014-2015), staff Departemen Kaderisasi di Lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS “Ibnu Muqhlah” (2014-2015), dan sebagai Ketua Departemen Sosial Masyarakat BEM FMIPA ITS (2015-2016), serta aktif dalam berbagai kepanitian dan pelatihan. Penulis juga aktif sebagai Asisten Dosen Kalkulus 1 dan Kalkulus 2 Mata Kuliah UPMB di ITS. Selain itu penulis pernah melaksanakan Kerja Praktek di PT. Perkebunan Nusantara X PG. Pesantren Baru Kediri pada tahun 2016. Jika ingin berdiskusi terkait Tugas Akhir ini, silahkan menghubungi penulis melalui

email : putrisaraswati063@gmail.com

